SZIMMETRIÁK ÉS INTEGRÁLHATÓ RENDSZEREK

Fehér László, Szeged, 2015. április 1.

szimmetria $\longrightarrow$ megmaradó mennyiség (Noether-tétel)
elég sok megmaradó mennyiség $\longrightarrow$ egzakt megoldhatóság

egzaktul megoldható ("integrálható") rendszerek fontossága:

biztos tudás, gazdag matematika, közelítések kiindulópontja

A Kepler–Coulomb-probléma mint példa

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\gamma\mathbf{r}/r^3, \quad \gamma = GmM \quad \text{vagy} \quad \gamma = -qQ/(4\pi\epsilon_0)$$

megmaradók: $E = p^2/2m - \gamma/r$, $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$, $\mathbf{K} = \mathbf{p}\times\mathbf{L} - \beta\mathbf{r}/r$, $(\beta = m\gamma)$

Runge–Lenz vektor, $\mathbf{K}$, algebrai megoldást tesz lehetővé:

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{r} = 0 \rightarrow \text{síkgörbe}, \quad \mathbf{L}\cdot\mathbf{K} = 0, \quad \mathbf{K}\cdot\mathbf{r} = Kr\cos\theta = L^2 - \beta r$$

és innen: $r[1 + (K/\beta)\cos\theta] = L^2/\beta$ kúpszelet.

Ellipszis, ha $E < 0$, mivel ekkor $K^2/\beta^2 = [1 + 2mL^2E/\beta^2] < 1$.

Kvantummechanikai változat (hidrogénatom) szintén megoldható algebrailag (Pauli 1926).

Hidrogénatom spektruma a szimmetriából

A kvantummechanikában az E, L_a, K_a fizikai mennyiségeknek önadjungált operátorok felelnek meg, jelölje ezeket $\mathbb{H}, \mathbb{L}_a, \mathbb{K}_a$. Kérdés a $\mathbb{H}$ Hamilton-operátor (kötött állapoti) spektruma.

Könnyű számolás adja az azonosságokat: $[\mathbb{H}, \mathbb{L}_a] = [\mathbb{H}, \mathbb{K}_a] = 0$ és

$$[\mathbb{L}_a, \mathbb{L}_b] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{abc}\mathbb{L}_c, \quad [\mathbb{L}_a, \mathbb{K}_b] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{abc}\mathbb{K}_c, \quad [\mathbb{K}_a, \mathbb{K}_b] = (-2m\mathbb{H})\mathrm{i}\hbar\epsilon_{abc}\mathbb{L}_c.$$

Ezért a $\mathbb{H}$ fix $E < 0$ energiás sajátalterén $\mathbb{M}^{\pm} := \frac{1}{2}(\mathbb{L} \pm \mathbb{K}/\sqrt{-2mE})$ kommutáló "impulzusmomentum algebrák":

$$[\mathbb{M}^s_a, \mathbb{M}^s_b] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{abc}\mathbb{M}^s_c \ (s = \pm), \quad [\mathbb{M}^+_a, \mathbb{M}^-_b] = 0, \quad \text{melyekre fennáll}$$

$$2[(\mathbb{M}^+)^2 + (\mathbb{M}^-)^2] + \hbar^2 = -\beta^2/(2mE) \quad \text{és} \quad (\mathbb{M}^+)^2 = (\mathbb{M}^-)^2.$$

A sajátaltéren $(\mathbb{M}^+)^2 = (\mathbb{M}^-)^2 = \hbar^2 j(j+1)$, ahol $j \in \{0, 1/2, 1, \ldots\}$.

Innen $n := (2j+1)$ bevezetésével adódik a spektrum: $E = -\frac{\beta^2}{2m\hbar^2}\frac{1}{n^2}$.

Mivel az $\mathbb{M}^+$ és $\mathbb{M}^-$ kommutáló algebráinak ábrázolásai $n := (2j+1)$-dimenziósak, E_n multiplicitása n^2. Fix n-re $\mathbb{L} = \mathbb{M}^+ + \mathbb{M}^-$ négyzetének sajátértékei $\hbar^2\ell(\ell+1)$ alakúak, ahol impulzusmomentum-összeadásból $\ell = 0{,}1, \ldots, 2j = (n-1)$.

Ez egy "örökzöld témakör" - lásd pl. N.J. MacKay, S. Salour: Amer. J. Phys. 83 (2015) 47-52.

Kutatási terület: Integrálható sokrészecske-rendszerek

Egyenesen vagy körön mozgó kölcsönható pontok, Hamilton-féle kanonikus mozgásegyenletekkel:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n \ (n \ \textbf{tetszőleges}),$$

ahol $H(q,p)$ a Hamilton-függvény (energia). Jellegzetes példák:

$$H_{\mathrm{Toda}}(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} e^{q_i - q_{i+1}}, \qquad \text{nyílt Toda-lánc}$$

$$H_{\mathrm{Cal}}(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} p_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{j \neq k} \frac{g^2}{(q_k - q_j)^2}, \qquad \text{Calogero-rendszer}$$

$$H_{\mathrm{Suth}}(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} p_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{j \neq k} \frac{g^2}{\sin^2(q_k - q_j)}, \qquad \text{Sutherland-rendszer}$$

$$H_{\mathrm{RS}}(q,p) = \sum_{k=1}^{n} (\cosh p_k) \prod_{j \neq k} \left[1 + \frac{g^2}{\sinh^2(q_k - q_j)}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{Ruijsenaars–Schneider}$$

Vizsgált kérdések és szükséges ismeretek

Az említett rendszerek és általánosításaik megjelennek a fizika számos területén és rendkívül sok szálon kötődnek a matematika fontos fejezeteihez. Vizsgálatuk kb. 45 éve folyik.

Mi főleg a klasszikus mechanikai (és időnként a kvantummechanikai) megoldhatóság matematikai hátterét kutatjuk. Integrálható rendszerek gyakran előállnak mint gazdag szimmetriákkal rendelkező magas dimenziós "szabad rendszerek" alacsony dimenziós vetületei. Technikailag ez a hamiltoni redukciós módszer, amely munkáinkban gyakran visszatér. (Lásd függelék és tanszéki honlap.)

Az egyik legérdekesebb nyitott kérdés a (hiperbolikus) Ruijsenaars–Schneider-rendszer visszavezetése szabad mozgásra.

Ez *matematikai-fizika*. Sokat kell hozzá **tanulni** lineáris algebrát, (analitikus) mechanikát, a szimmetriák elméletét (különösen Lie-csoportokat és algebrákat), speciális függvényeket, differenciál (szimplektikus és Poisson) geometriát. Eddigi PhD hallgatóim (pl. Pusztai Gábor, Görbe Tamás) korán kezdték a releváns speciális ismeretek megszerzését, és ez tűnik a természetes útnak, ha valaki érdeklődik az (esztétikai élményt is nyújtó) integrálható rendszerek iránt.

Függelék: Calogero-rendszer szabad mátrixdinamikából

Szabad mozgás: $\frac{d^2X(t)}{dt^2} = 0$, ahol $X(t)$ $n \times n$-es hermitikus mátrix.

Szimmetriák: $X(t) \to X(t+c)$ és $X(t) \to RX(t)R^{-1}$ bármely c valós számra és R konstans unitér mátrixra megoldást megoldásba visz.

Megmaradó mennyiségek: $E = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\dot{X}^2)$ és $J = [X, \dot{X}]$.

Tekintsük azon szabad mozgásokat, amelyekre $J = \mathrm{i}g(vv^\dagger - \mathbf{1}_n)$, ahol a v oszlopvektor minden komponense 1, $\mathbf{1}_n$ az egységmátrix, $g \neq 0$ valós konstans.

Minden hermitikus mátrix diagonalizálható. Ezért írhatjuk, hogy $Q(t) = U(t)X(t)U(t)^{-1}$, ahol $U(t)$ unitér, $Q(t) = \mathrm{diag}(q_1(t), \ldots, q_n(t))$ pedig az $X(t)$ csökkenő sorrendbe rendezett sajátértékekeiből álló diagonális mátrix.

Igazolható a következő állítás: A fenti módon megszorított szabad mátrixdinamika ekvivalens a sajátértékek Calogero-rendszer szerinti dinamikájával. A mátrixmozgás E kinetikus energiája pontosan a Calogero-féle Hamilton függvényt adja $p_i = \dot{q}_i$-tal.