

# Relativisztikus pont-mechanika

Balog János

*MTA Wigner FK RMI, Budapest*

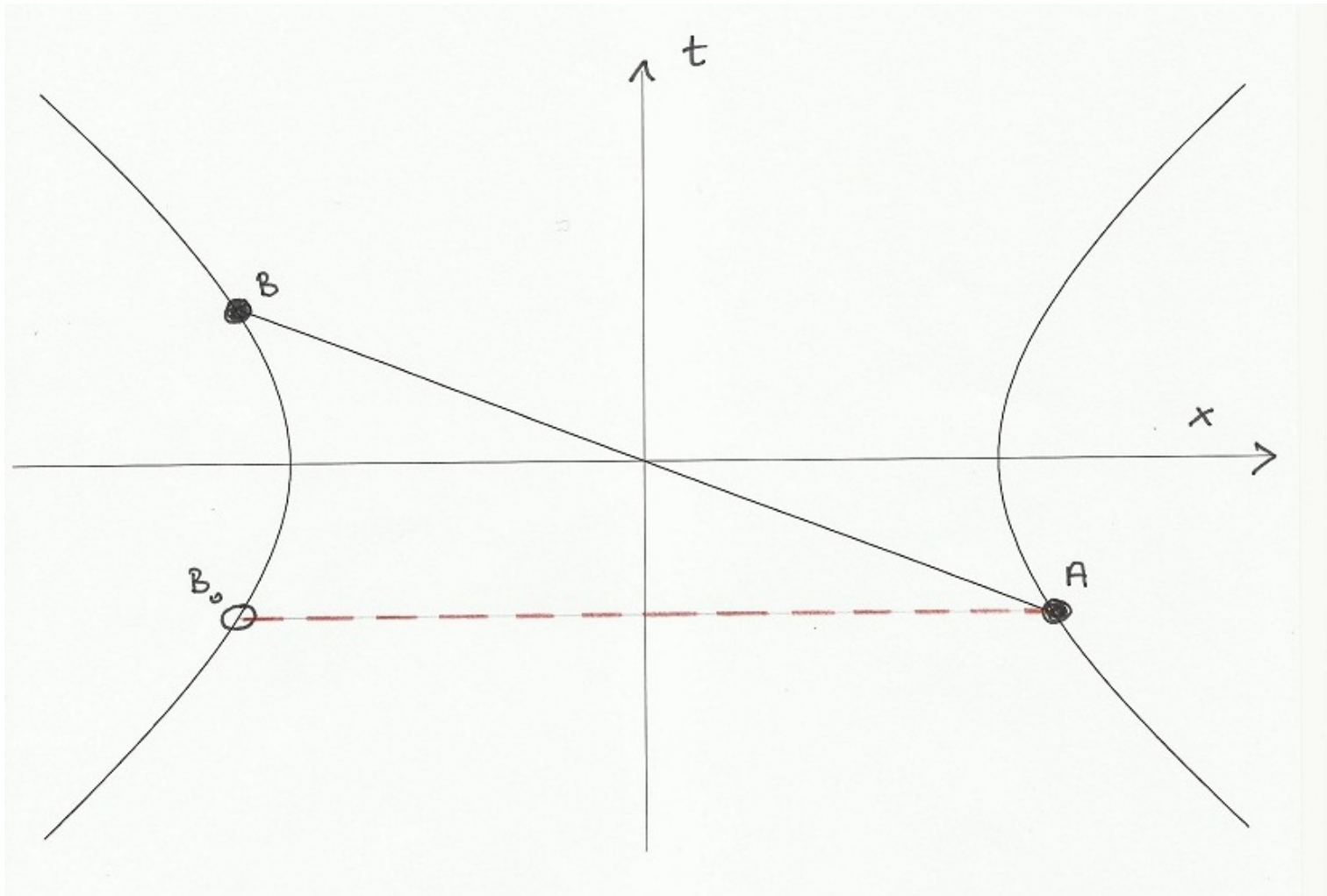
- Pont-mechanika és kauzalitás, “no-interaction” tétel
- Relativisztikus és prediktív mechanika
- Kanonikus relativisztikus mechanika
- Ruijsenaars-Schneider modellek ( $1 + 1$  dim)
- Fizikai alkalmazások

# Kauzalitás és pont-mechanika

Relativisztikus részecskefizika = relativisztikus kvantumtérelmélet (QFT)

Relativisztikus pont-mechanika: szükséges / lehetséges?

- **Dirac ('49)**: három lehetséges formalizmus (nem bizonyította, hogy konzisztensek)  
“instant form”: pillanatszerű távolhatás
- **Thomas, Havas, Foldy,...**



**Figure 1:** Ha az egyik részecske mozgásállapotát az  $A$  téridő pontban megváltoztatjuk, erről a másik részecske legkorábban a  $B$  téridőpontban értesülhet, a hatás nem terjedhet pillanatszerűen az egyidejű  $B_0$  téridő pontba.

- Currie, Jordan, Sudarshan '63, Leutwyler '65 “no-interaction” tétel  
szokásos kanonikus mechanika:  $\{x_a^i\}_{a=1}^r$   $\{p_a^i\}_{a=1}^r$  kanonikus változók  
Hamilton-függvény:  $\mathcal{H}(x, p)$   
további 9 Poincaré generátor, melyek geometriailag hatnak a  
részecske-koordinátákon (világvonal-feltétel **WLC**)



Csak szabad részecskerendszer a megoldás!

- Currie '66, Hill '67  $\{x_a^i\}$  koordináták kanonikusságát kell csak feladni  
⇒ Currie-Hill (CH) egyenletek
- '80-as évek: Todorov, Komar, Samuel, Sudarshan, Mukunda...  
konkrét konstrukciók (Hamiltoni redukció)  
 $1 + 1$  dimenziós példák

# Pont-mechanika (M)

$x^\mu$ : téridő koordináták  $\mu = 0, 1, 2, 3$

$x^i$ : tér koordináták  $i = 1, 2, 3$   $x^0 = ct$

$\{x_a^i(t)\}_{a=1}^r$   $r$ -részcseke trajektóriák

alternatív leírás:  $\{x_a^\mu(\tau_a)\}$   $x_a^0(\tau_a) \sim ct$   $\frac{dx_a^0}{d\tau_a} > 0$

fázistér:  $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m)$

pont-mechanikai rendszer:  $\{x_a^i(t; \xi)\}$  függvények

## Példák:

- természetes fázistér:  $y_a^i = x_a^i(0) \quad v_a^i = \dot{x}^i(0) \quad [6r]$

- szórási problémák:  $\{\bar{y}_a^i, \bar{v}_a^i\} \quad [6r]$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \{x_a^i(t) - (\bar{y}_a^i + \bar{v}_a^i t)\} = 0$$

- absztrakt fázistér:  $\{p^A, q^A\} \quad A = 1, 2, \dots, f \quad [2f]$

# Relativisztikus pont-mechanika (RM)

Poincaré transzformáció:

$$\tilde{x}^\mu = -A^\mu + L^\mu{}_\nu x^\nu \quad L^\mu{}_\nu L_{\mu\omega} = \eta_{\nu\omega}$$

10 generátor:  $\{\hat{H}, \hat{P}_i, \hat{L}_i, \hat{K}_i\}$

kommutációs relációk:

$$[\hat{H}, \hat{P}_i] = 0 \quad [\hat{H}, \hat{L}_i] = 0 \quad [\hat{H}, \hat{K}_i] = \hat{P}_i$$

$$[\hat{L}_i, \hat{P}_j] = \epsilon_{ijm} \hat{P}_m \quad [\hat{L}_i, \hat{L}_j] = \epsilon_{ijm} \hat{L}_m \quad [\hat{L}_i, \hat{K}_j] = \epsilon_{ijm} \hat{K}_m$$

$$[\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0 \quad [\hat{P}_i, \hat{K}_j] = \frac{1}{c^2} \delta_{ij} \hat{H} \quad [\hat{K}_i, \hat{K}_j] = -\frac{1}{c^2} \epsilon_{ijm} \hat{L}_m$$

$\{x_a^\mu(\tau_a)\}_{a=1}^r \sim X(\xi)$  részalmaz téridőben

Poincaré transzformált trajektóriák:

$$\Lambda(g; X) : \Lambda(g_2; \Lambda(g_1; X)) = \Lambda(g_2 g_1; X)$$

## Relativisztikus mechanika

Létezik  $L(g; \xi)$ : Poincaré hatása a fázistéren

$$X(L(g; \xi)) = \Lambda(g; X(\xi))$$

Csoportthatás:

$$\begin{aligned} X(L(g_2; L(g_1; \xi))) &= \Lambda(g_2; X(L(g_1; \xi))) = \Lambda(g_2; \Lambda(g_1; \xi)) \\ &= \Lambda(g_2 g_1; \xi) = X(L(g_2 g_1; \xi)) \end{aligned}$$

$$L(g_2; L(g_1; \xi)) = L(g_2 g_1; \xi)$$



$$\tilde{x}_a^i = -A^i + L^i_j x_a^j + L^{i0} x_a^0 \quad \tilde{x}_a^0 = -A^0 + L^0_j x_a^j + L^{00} x_a^0$$

argumentum:  $x_a^0 = ct_a \Rightarrow \tilde{x}_a^0 = ct$

$$\begin{aligned} x_a^i(t; L(g, \xi)) &= -A^i + L^i_j x_a^j(t_a; \xi) + L^{i0} ct_a \\ &\quad - A^0 + L^0_j x_a^j(t_a; \xi) + L^{00} ct_a = ct \end{aligned}$$

for infinitesimal transformations:  $g = 1 + \varepsilon^A T^A + O(\varepsilon^2)$

$$A^\mu \approx \alpha^\mu \quad L^\mu_\nu \approx \delta^\mu_\nu + \lambda^\mu_\nu \quad t_a \approx t + \sigma_a$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^A \hat{Q}^A x_a^i(t) &= -\alpha^i + \lambda^i_j x_a^j(t) + \sigma_a \dot{x}_a^i(t) + \lambda^{i0} ct \\ &\quad - \alpha^0 + \lambda^0_j x_a^j(t) + c\sigma_a + \lambda^{00} ct = 0 \end{aligned}$$

## időeltolás

$$\varepsilon^A \hat{Q}^A = \alpha^0 \hat{H} / c \quad \alpha^i = \lambda^\mu{}_\nu = 0$$

$$\sigma_a = \alpha^0 / c \quad \alpha^0 \hat{H} x_a^i = \alpha^0 \dot{x}_a^i$$

$$\hat{H} x_a^i = \dot{x}_a^i$$

## téreltolás

$$\varepsilon^A \hat{Q}^A = \alpha^j \hat{P}_j \quad \alpha^0 = \lambda^\mu{}_\nu = 0$$

$$\sigma_a = 0 \quad \alpha^j \hat{P}_j x_a^i = -\alpha^i$$

$$\hat{P}_j x_a^i = -\delta_{ij}$$

## forgás

$$\hat{L}_j x_a^i = \epsilon_{jik} x_a^k$$

## Lorentz boost

$$\varepsilon^A \hat{Q}^A = u^j \hat{K}_j \quad \alpha^\mu = \lambda^i_j = 0 \quad \lambda^j_o = \lambda^o_j = u^j / c$$

$$\sigma_a = -u^j x_a^j / c^2 \quad u^j \hat{K}_j x_a^i = -u^k x_a^k \dot{x}_a^i / c^2 + u^i t$$

$$\hat{K}_j x_a^i = -\frac{1}{c^2} x_a^j \dot{x}_a^i + \delta^{ij} t$$

# Világvonal feltételek (WLC)

$$y_a^i = x_a^i(0) \quad v_a^i = \dot{x}_a^i(0) \quad \mu_a^i = \ddot{x}_a^i(0)$$
$$\hat{H} y_a^i = v_a^i \quad \hat{H} v_a^i = \mu_a^i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{P}_i y_a^k = -\delta_{ik} \\ \hat{L}_i y_a^k = \epsilon_{ikl} y_a^l \\ \hat{K}_i y_a^k = -\frac{1}{c^2} y_a^i v_a^k \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{P}_i v_a^k = 0 \\ \hat{L}_i v_a^k = \epsilon_{ikl} v_a^l \\ \hat{K}_i v_a^k = \delta_{ik} - \frac{1}{c^2} v_a^i v_a^k - \frac{1}{c^2} y_a^i \mu_a^k \end{array} \right.$$

# Prediktív mechanika (PM)

Természetes fázistér ( $6r$  dimenziós)

$$\xi : \quad \{y_a^i, v_a^i\}$$

trajektóriák:  $x_a^i(t; y, v) \quad x_a^i(0; y, v) = y_a^i \quad \dot{x}_a^i(0; y, v) = v_a^i$

gyorsulás:  $\ddot{x}_a^i(t; y, v)$



Newtoni egyenletek:

$$\ddot{x}_a^i(t) = \mu_a^i(x(t), \dot{x}(t))$$

dinamika:

$$\hat{H} = \sum_a \left\{ v_a^i \frac{\partial}{\partial y_a^i} + \mu_a^i(y, v) \frac{\partial}{\partial v_a^i} \right\}$$

# Prediktív relativisztikus mechanika (PRM)

Poincaré generátorok:

$$\hat{P}_i = - \sum_a \frac{\partial}{\partial y_a^i}$$

$$\hat{L}_i = \epsilon_{ijk} \sum_a \left\{ y_a^k \frac{\partial}{\partial y_a^j} + v_a^k \frac{\partial}{\partial v_a^j} \right\}$$

$$\hat{K}_i = \sum_a \left\{ -\frac{1}{c^2} y_a^i v_a^k \frac{\partial}{\partial y_a^k} + \left( \delta_{ik} - \frac{1}{c^2} v_a^i v_a^k - \frac{1}{c^2} y_a^i \mu_a^k \right) \frac{\partial}{\partial v_a^k} \right\}$$

Poincaré Lie algebra relációk: megszorítások a  $\mu_a^i$  gyorsulásokra

eltolás:  $\mu_a^i$  csak a relatív távolságoktól függhet

forgás:  $\mu_a^i$  a vektor-változók vektoriális függvénye

$$[\hat{H}, \hat{K}_i] = \hat{P}_i \quad \Rightarrow \quad \text{Currie-Hill (CH) egyenletek}$$

$$\sum_b \left\{ \frac{\partial \mu_a^i}{\partial v_b^k} + \frac{1}{c^2} (x_a^k - x_b^k) v_b^j \frac{\partial \mu_a^i}{\partial x_b^j} + \frac{1}{c^2} (x_a^k - x_b^k) \mu_b^j \frac{\partial \mu_a^i}{\partial v_b^j} - \frac{1}{c^2} v_b^k v_b^j \frac{\partial \mu_a^i}{\partial v_b^j} \right\} \\ + \frac{2}{c^2} v_a^k \mu_a^i + \frac{1}{c^2} \mu_a^k v_a^i = 0$$

PRM-1       $\{\mathcal{H}, \mathcal{P}_i, \mathcal{L}_i, \mathcal{K}_i\}$  mennyiségek léteznek

PRM-2      fázistéren szimplektikus struktúra (Poisson zj)

$$\hat{H} = \{\mathcal{H}, \dots\} \quad \hat{P}_i = \{\mathcal{P}_i, \dots\} \quad \text{etc.}$$

# Kanonikus relativisztikus mechanika (CRM)

- szimplektikus struktúra a fázistéren
- 10 Poincaré generátor adott:  $\{\mathcal{H}, \mathcal{P}_i, \mathcal{L}_i, \mathcal{K}_i\}$
- $\{y_a^i\}$  trajectória változók adottak
- Világvonal feltételek teljesülnek:

$$\{\mathcal{P}_i, y_a^k\} = -\delta_{ik}$$

$$\{\mathcal{L}_i, y_a^k\} = \epsilon_{ikl} y_a^l$$

$$\{\mathcal{K}_i, y_a^k\} = -\frac{1}{c^2} y_a^i \{\mathcal{H}, y_a^k\}$$



# Ruijsenaars-Schneider modellek

1 + 1 dimenziós “toy” modellek

1 + 1 dim Poincaré:  $\{\mathcal{H}, \mathcal{P}\} = 0$   $\{\mathcal{H}, \mathcal{K}\} = \mathcal{P}$   $\{\mathcal{P}, \mathcal{K}\} = \mathcal{H}/c^2$

WLC:  $\{\mathcal{P}, x_a\} = -1$   $\{\mathcal{K}, x_a\} = -x_a\{\mathcal{H}, x_a\}/c^2$

RS Ansatz:

kanonikus változók:  $\{q_a, \theta_b\} = \delta_{ab}$   $a, b = 1, 2, \dots, r$

Poincaré generátorok:

$$\mathcal{H} = mc^2 \sum_a \operatorname{ch}\theta_a V_a \quad \mathcal{P} = mc \sum_a \operatorname{sh}\theta_a V_a \quad \mathcal{K} = -\frac{1}{c} \sum_a q_a$$

$$V_a = \prod_{b \neq a} f(q_a - q_b) \quad f > 0 \quad \text{ps fv}$$

$$\{\mathcal{H}, \mathcal{P}\} = \frac{m^2 c^3}{2} \sum_a \frac{\partial}{\partial q_a} \prod_{b \neq a} f^2(q_a - q_b) = 0$$

megoldás:  $f^2(q) = a + b \mathfrak{p}(q)$  Weierstrass függvény

degenerált (speciális) esetek:  $f(x) = \sqrt{1 + W(x)}$

$$W(x) = \begin{cases} \frac{g^2}{x^2} & \text{type I (rac.)} \\ \frac{\gamma^2}{\text{sh}^2 \omega x} & \text{type II (hip.)} \\ \frac{\gamma^2}{\sin^2 \omega x} & \text{type III (trig.)} \end{cases}$$

## Trajektória változók:

$$Q_a(x; q, \theta) = \exp\{x\hat{P}\} q_a \quad a = 1, 2, \dots, r$$

monoton:  $\frac{dQ_a(x)}{dx} < 0$



egyértelmű:  $Q_a(x_a) = 0$

nem kanonikus!  $\{x_a, x_b\} \neq 0$

# Fizikai alkalmazások

- klasszikus elektronelmélet (Feynman-Wheeler/Rohrlich)
- Kompakt kettős rendszerek ált. rel.-ben (gravitációs hullámforrás)

Futamase-Itoh Blanchet et al. Damour-Jaranowski-Schäfer

- (pontoszerűnek tekinthető) 2 fekete lyuk vagy neutroncsillag
- mozgásegyenletek poszt-Newtoni ( $1/c^2$ ) kifejtésben: 3, 3 1/2 rend (legújabbban 4 rend)
- CH egyenletek (poszt-Newtoni kifejtésben) teljesülnek
- regularizálással kapcsolatos nemegyértelműség 3. PN rendben a Poincaré szimmetria megkövetelésével oldható fel