



Haar Alfréd fizikai matematikája. I-II.

Varró Sándor

**MTA WIGNER FIZIKAI KUTATÓKÖZPONT
Szilárdtestfizikai és Optikai Intézet, Budapest**

**SZTE Elméleti Fizika, 2014. szeptember 18.,
csütörtök, 13:00.**



Haar Alfréd. 1885. október 11., Budapest --- 1933. március 16., Szeged.

»Én Haar Alfréd, 1885. október 11-én születtem Budapesten, Haar Ignác földbirtokos és neje, szül. Fuchs Emma fiaként. Szülővárosomban az evangélikus gimnáziumba jártam, amelyet 1903-ban az érettségi bizonyítvánnyal hagytam el. 1904 húsvétja óta a budapesti egyetemen matematikai, fizikai és csillagászati előadásokat hallgattam. 1905 őszén a göttingai egyetemre iratkoztam be.

Budapesten Beke, báró Eötvös, Fröchlich, Kürschák, Rados, Scholtz, Göttingában Carathéodory, Hilbert, Klein, Minkowski, Prandtl, Runge, Schwarzschild, Voigt, Zermelo előadásain ill. szemináriumain vettem részt. Mindezeket az urakat el nem múló hálám illeti. Különösképpen mélyen lekötve érzem magam azonban Hilbert titkos tanácsos úrnak azért a sokoldalú ösztönzésért és sokrétű tanításért, amelyet egész göttingai tanulmányi időm alatt előadásai és személyes érintkezés révén nyújtott; állandó ösztönző érdeklődéséért legmélyebb hálámat fejezem ki.<<

[1] Haar A, *Összegyűjtött Munkái*. Sajtó alá rendezte Szőkefalvi-Nagy Béla (Akadémia Kiadó, Budapest, 1959). Bevezetés, Haar Alfréd rövid életrajza.

A BUDAPESTI ÁGOSTAI HITV. EVANG. FŐGYMNASIUM
Ia. osztályának
BIZONYÍTVÁNYKÖNYVE

az 1895/6 tanévről.

Scholtz Albert
osztálytanár.

A Budapesti Ágostai Hitv. Evang.
FŐGYMNASIUM Ia osztályának
ÉRTESÍTŐJE Az 1895/6 tanévről.
Scholtz Albert osztálytanár.

Tanuló neve és kora	Haza, osztály és lakcíme	Vallása
R. Fleer Albert 1895 okl. 11.	Budapest	ar.
I. Félév.		
Általános osztályzat: jo		
Magaviselete:	jo	
Figyelme:	jo	
Szorgalma:	jo	
Vallástan:	jo	
Latin nyelv:	elég	
Görög nyelv:		
Magyar nyelv:	jele	
Német nyelv:	jele	
Történelem:		
Földrajz:	jo	
Számítás:	jele	
Mértan:		
Mértani rajz:	jo	
Természet-		
Lélektan:		
Logika:		
Testgyakorlat:	elég	
Szépírási:	jo	
Ének:	elég	
Írásbeli dolgozatok kialakítása:	nem elég rendszeres	
Mulasztott órák száma:	37 ig.	

A BUDAPESTI ÁG. HITV. EVANG.
FŐGYMNASIUM
ÉRTESÍTŐJE

AZ 1902/1903-IKI ISKOLAI ÉVRŐL.

KÖZZÉTESZI
GÓBI IMRE,
E. I. IGAZGATÓ.



BUDAPEST
FRANKLIN-TÁRSULAT KÖNYVNYOMDÁJA
1903.

**A Budapesti Ág. Hitv. Evang. FŐGYMNASIUM ÉRTESÍTŐJE
Az 1902/1903-iki iskolai évről. Közzéteszi GÓBI IMRE
E. I. Igazgató (Budapest, Franklin-Társulat
Könyvnyomdája, 1903)**

IV. A főgimnáziumi dal- és zeneegyesületet a lefolyt iskolai évben is Rätz László tanár vezette. Tisztviselői voltak: Ángyán János (VIII) elnök, Kovács Sándor (VIII) alelnök, Krámer Gusztáv (VIII) főjegyző, Hazay Olivér (VIII) főpénztáros, Haar Alfréd (VIII) ellenőr, Kehrling Károly (VIII) főgondnok, Zsigmondy Gábor (VII) jegyző, Weisz Frigyes (VII) pénztáros, Mautner István (VII) gondnok, Strasser István (VI) gondnok, Münnich Aurél (V) gondnok. A tagok száma 257. Az énekkari próbákat Erődi Ernő fővárosi énektanár, a zenekari próbákat Erődi Ernő és Kovács Sándor (VIII) vezették. Az egyesület részt vett a március 15-iki ünnepen, mely alkalommal az énekkar hazafias dalokat énekelt, Ángyán János (VIII), Kovács Sándor (VIII) és Meer Leo (VIII) pedig magyar zenedarabok előadásával emelték az ünnep fényét. Február 7-én jótékonycélú hangversenyt rendezett az egyesület, melynek műsora a következő volt: I. Schubert: Ima. Előadta a «Dal- és Zene-Egyesület» énekkara, Erődi Ernő énektanár vezetése alatt. II. Rieding: Præludium és Fuga három hegedűre, zongorakísérettel. Előadták: Berger Ernő VII. oszt. tanuló,

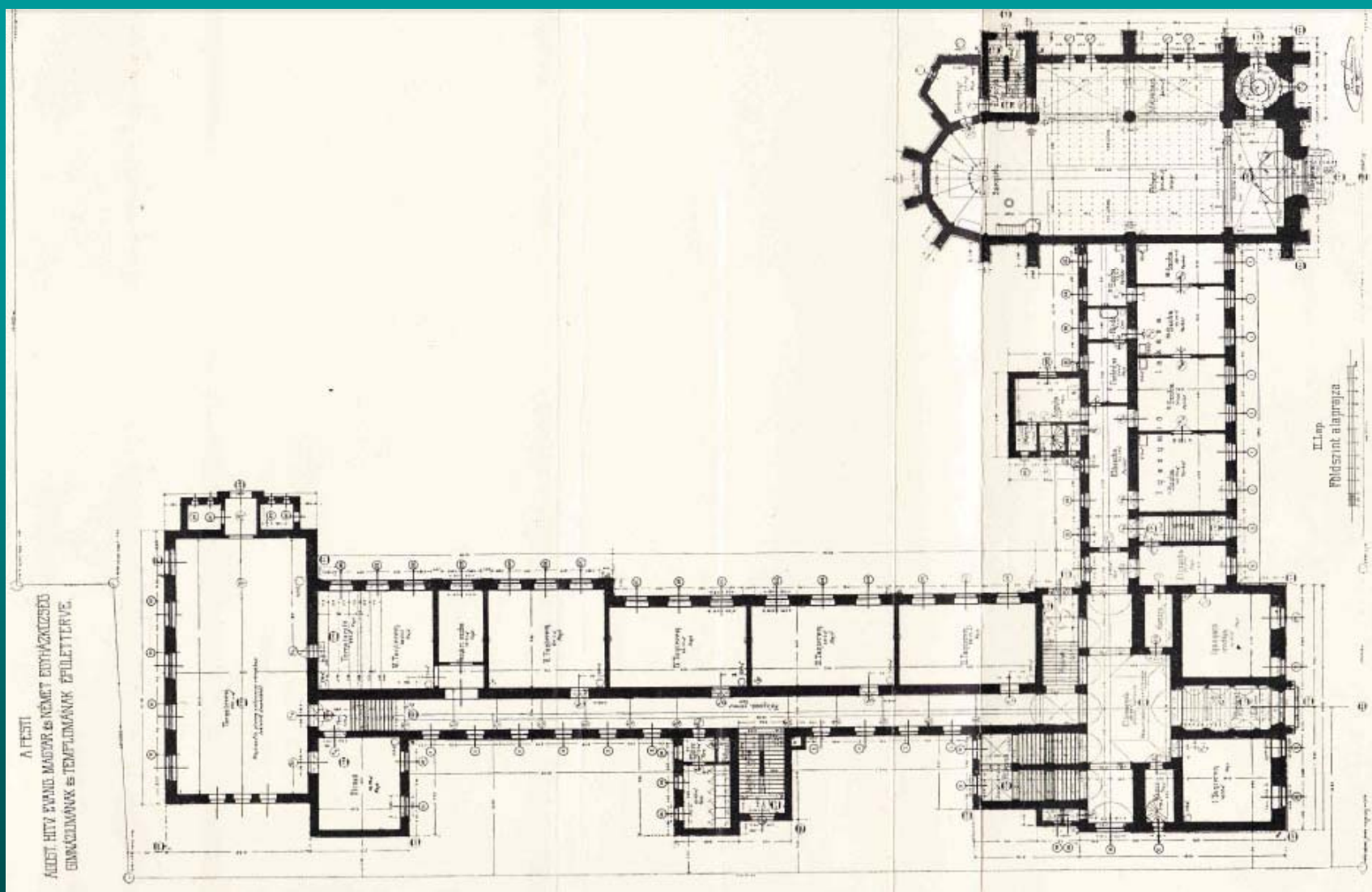
**A Budapesti Ág. Hitv. Evang. FŐGYMNASIUM ÉRTESÍTŐJE Az 1902/1903-iki iskolai évről.
Közzéteszi GÓBI IMRE Igazgató (Budapest, Franklin-Társulat Könyvnyomdája, 1903)**

A PESTI ÁGOST. HITV. EVANG. MAGYAR ÉS NEMET EGYHÁZKÖZSÉG
GYMNAZIUMÁNAK TERVE

FŐHOMLOKZAT



**A Budapesti Ágost. Hitv. Evang. FŐGYMNASIUM ÉRTESÍTŐJE Az 1903/1904-iki iskolai évről.
Közzéteszi GÓBI IMRE, E. I. Igazgató (Budapest, Franklin-Társulat Könyvnyomdája, 1904)**



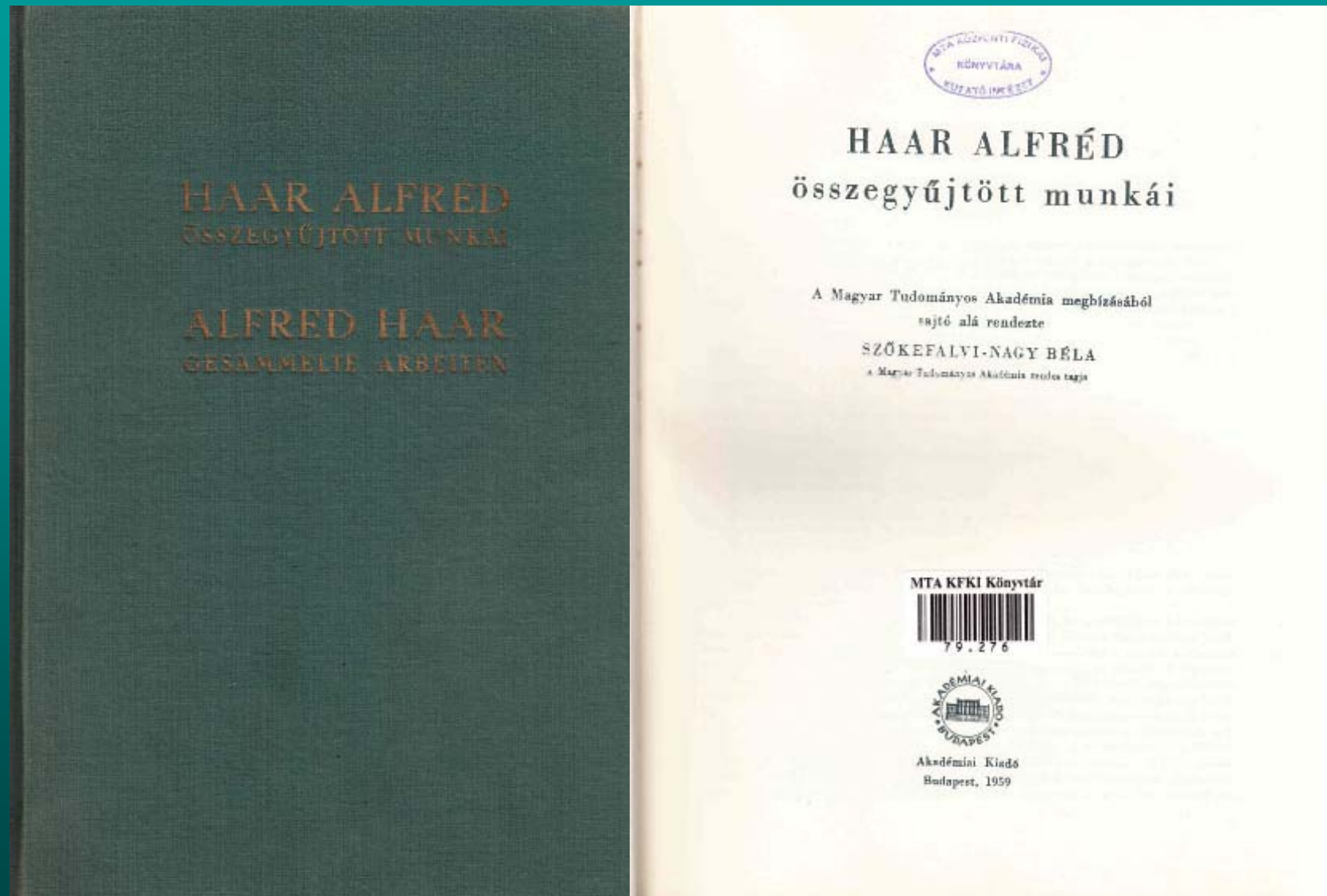
A PESTI ÁGOST. HITV: EVANG: MAGYAR és NÉMET EGYHÁZKÖZSÉG GIMÁZIUMÁNAK és TEMPLOMÁNAK ÉPÜLETTERVE. [in A Budapesti Ágost. Hitv. Evang. FŐGYMNASIUM ÉRTESÍTŐJE Az 1903/1904-iki iskolai évről. Közzéteszi GÓBI IMRE, E. I. Igazgató (Budapest, Franklin-Társulat Könyvnyomdája, 1904)]

Az előadás vázlata.

- Haar szerepe a matematikában a XX. század elején.
- Néhány másolat Haar egyetemi előadásjegyzeteiből.
- A Haar – féle ortogonális függvényrendszer. 'Haar wavelet'.
- Haar-wavelet később. Néhány egyéb wavelet-alkalmazás. Illusztrációk.
- A Haar – féle lemma variációszámításban.
- A Haar – féle invariáns mérték. Integrál.

Haar szerepe a XX. század elején

Haar A, *Összegyűjtött Munkái*. Sajtó alá rendezte Szőkefalvi-Nagy Béla (Akadémia Kiadó, Budapest, 1959)



Bevezetés

Haar Alfréd egyike azoknak a matematikusoknak, akiknek a munkássága a matematika legújabb fejlődésére általánosan elismerten nagy hatással volt. Áll ez az ortogonális függvény-sorokra és a variációszámításra vonatkozó munkásságára, de egészen különleges mértékben áll ez a folytonos csoportokra vonatkozó, egyben utolsó munkájára, amely egyébként székfoglaló tanulmánya volt a Magyar Tudományos Akadémián. Korai halála megakadályozta, hogy alapvető felfedezése következményeinek kiaknázásában maga is részt vegyen.

A Magyar Tudományos Akadémia már évekkel ezelőtt elhatározta, hogy kiadja Haar Alfréd összegyűjtött munkáit; a kiadás most, röviddel Haar halálának 25-ik évfordulója után valósul meg. Ez a 25 év elegendő volt ahhoz, hogy Haar tudományos teljesítményének egész jelentősége tisztán kibontakozzék.

Haar Alfréd rövid életrajza után dolgozatainak jegyzékét közöljük, időrendi sorrendben. Ezután következnek maguk a dolgozatok, az alábbi, tárgykörök szerinti csoportosításban:

- A. Halmazelmélet.
- B. Ortogonális függvény-sorok és szinguláris integrálok.
- C. Analitikus függvények.
- D. Parciális differenciálegyenletek.
- E. Variációszámítás.
- F. Függvényapproximációk és lineáris egyenlőtlenségek.
- G. Diszkrét csoportok és függvényalgebrák.
- H. Folytonos csoportok.

Az egyes dolgozatcsoportok elé néhány, az illető vizsgálatokra vagy mások által végzett közvetlen folytatásukra vonatkozó jegyzetet illesztettünk be, természetesen a teljességre való minden igény nélkül.

Alfred Haar, Gesammelte Arbeiten. Edited by B. Sz.-NÁGY. Pp. 660. 1959. (Akademie der Wissenschaften, Budapest)

With the edition of the collected work of Alfred Haar (1885–1933) the Hungarian Academy of Sciences has paid a fitting tribute to the memory of this outstanding mathematician. All his 35 publications are photostatically reproduced and according to subject matter divided into 8 sections each of which is introduced by a short appreciation and valuable references to later developments. The most important sections are those on orthogonal functions (the Haar system), on calculus of variation (Haar's lemma), and, of course, the section on continuous groups (Haar measure and integral) which is Haar's outstanding contribution to modern Mathematics.

Most papers are in German language and for those in Hungarian a German translation has been added. The volume is very handsomely produced.

W. W. ROGOSINSKI

Review: [untitled]

Author(s): W. W. Rogosinski

Source: *The Mathematical Gazette*, Vol. 45, No. 352 (May, 1961), p. 155

Published by: [The Mathematical Association](#)

Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/3614648>

Accessed: 13/02/2011 03:17

Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 49., Budapest, Hungary, 1985. Szabados J and Tandori K (editors), *Alfréd Haar Memorial Conference* Vols. I-II. (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1987)

COLLOQUIA MATHEMATICA
SOCIETATIS JÁNOS BOLYAI, 49

A. HAAR
MEMORIAL CONFERENCE

Edited by

J. SZABADOS and K. TANDORI

VOL. I.

Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 49.,
Budapest, Hungary, 1985. Szabados J and Tandori
K (editors), *Alfréd Haar Memorial Conference* Vols. I
- II. (North-Holland Publishing Company,
Amsterdam, 1987)



NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY
AMSTERDAM-OXFORD-NEW YORK

MTAK



„ Tegyük ehhez hozzá, hogy a gimnáziumban Rátz László, a *Középiskolai Matematikai Lapok* érdemes szerkesztője volt a matematika-tanára. Ennek a lapnak Haar is szorgalmas munkatársa volt középiskolás korában. Az előző évben érettségizettek számára évenként tartott >>Eötvös Loránd matematikai verseny<<-en 1903 őszén Haar Alfréd nyerte az első díjat. Ez a siker jegyezte el az érettségije után először vegyészmérnök-hallgatónak beiratkozott fiatalembert végleg a matematikával.

A doktori szigorlatot 1909. Június 16-án tette le a göttingai egyetem bölcsészeti karán, disszertációjának Hilbert volt a referense. Alig néhány hónap múlva, még 1909-ben ugyanez a kar magántanárrá habilitálta.

Miután rövid ideig a zürichi műegyetem helyettes tanára volt, 1912-ben a Budapestre meghívott Fejér Lipót utódjaként a kolozsvári egyetem egyik matematika-fizika tanszékére nevezték ki, először nyilvános rendkívüli tanárrá; majd 1917-ben nyilvános rendes tanárrá; a másik tanszék tanára Riesz Frigyes volt.

Az első világháború után Erdélynek Magyarországtól való elcsatolása következtében az addigi kolozsvári egyetem tanárainak el kellett hagyniuk e várost és előbb átmenetileg Budapesten, majd 1920-tól Szegeden folytatták működésüket. Haar Alfréd és Riesz Frigyes az új szegedi matematikai szemináriumot – amelyet később Bolyai Intézetnek neveztek el – hamarosan nemzetközi tekintélyű matematikai centrummá fejlesztették: ebben nagy szerepet játszott az a folyóirat, az *Acta Scientiarum Mathematicarum*, amelyet Haar és Riesz 1922-ben alapítottak (mint az egyetem *Acta*-inak matematikai szekcióját).

Egyetemi előadásainak tárgyát Haar leginkább az algebra számelmélet, analitikus geometria, mechanika, differenciálegyenletek, variációszámítás, folytonos csoportok elmélete területeiről választotta. Elsőrangú egyetemi előadó volt, előadásai világosságban, logikus felépítésben mintaszerűek voltak.

A Magyar Tudományos Akadémia 1931-ben Haart levelező tagjává választotta.

Egyetemi tanári működését Szegeden egészen az 1933. március 16-án bekövetkezett haláláig folytatta. A gyilkos betegség (gyomorrák) okozta halál életének legalkotóbb szakaszában, 48-ik életévében, néhány hónapos szenvedés után ragadta el az élők sorából. Szülővárosában, Budapesten van eltemetve.”

[1] Haar A, *Összegyűjtött Munkái*. Sajtó alá rendezte Szőkefalvi-Nagy Béla (Akadémia Kiadó, Budapest, 1959). Bevezetés, Haar Alfréd rövid életrajza



RIESZ
FRIGYES
1880
1956



HAAR
ALFRED
1885
1933



A SZEGEDI MATEMATIKAI ISKOLA
VILÁGHIRŰ MEGALAPÍTÓI



A Riesz-Fischer – tétel [1907].

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions.*

Note ⁽¹⁾ de M. FRÉDÉRIC RIESZ, présentée par M. Émile Picard.

Pour la résolution de certaines équations fonctionnelles, du type de l'équation bien connue de Fredholm, M. Hilbert a indiqué une méthode générale⁽²⁾; cette méthode consiste à rattacher la résolution de ces équations fonctionnelles à la résolution d'un système infini d'équations linéaires

⁽¹⁾ Présentée dans la séance du 11 mars 1907.

⁽²⁾ *Göth. Nachr.*, 1906, p. 157 et 439.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la convergence en moyenne.* Note ⁽¹⁾

de M. ERNST FISCHER, présentée par M. Émile Picard.

Le 11 mars, M. Riesz a présenté à l'Académie une Note sur les systèmes orthogonaux de fonctions (*Comptes rendus*, 18 mars 1907). J'étais arrivé au même résultat et je l'ai démontré dans une conférence faite à la Société mathématique à Brunn, déjà le 5 mars. Ainsi mon indépendance est évidente, mais la priorité de la publication revient à M. Riesz. Je me permets

$a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \dots$ unique, caractéristique du nombre J , et qui ne peut être illimité que si J est irrationnel.

⁽¹⁾ Présentée dans la séance du 29 avril 1907.

Riesz F, *Comptes rendus* 18 mars, pp 615-619 (1907) [„Présentée dans la scéance du 11 mars 1907”]

Fischer E, *Comptes rendus* 13 mai, pp 1022-1024 (1907) [„Présentée dans la scéance du 29 avril 1907”]

Hilbert két doktorandusza: Erhard Schmidt [1905]; Haar Alfréd [1909]

Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen.

I. Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen
vorgeschriebener.*)

Von

ERHARD SCHMIDT in Bonn.

) Dieser Teil ist bis auf das neu hinzugekommene IV Kapitel, den § 13 und unwesentliche Änderungen in den übrigen Kapiteln ein Abdruck meiner im Juli 1905 erschienenen Göttinger Inauguraldissertation.

**) *Acta Mathematica* Bd. 27.

Schmidt E, *Mathematische Annalen* 63, 433-476 (1907); 64, 161-174 (1907); 65, 370-399 (1908);...

Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme.*)

(Erste Mitteilung.)

Von

ALFRED HAAR in Göttingen.

*) Die vorliegende Arbeit ist, bis auf unwesentliche Änderungen, ein Abdruck meiner im Juli 1909 erschienenen Göttinger Inauguraldissertation.

Haar A, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Erste Mitteilung). *Mathematische Annalen* 69, 331-371 (1910). [2c] Haar A, Zweite Mitteilung; *ibid.* 71, 38-53 (1911);...

Riesz 1911-ben, Haar 1912-ben kifejezetten Farkas Gyula közbenjárására került a kolozsvári egyetemre:

**„Nagyságos Dr. Fejér Lipót
Tud. Egyetemi tanár úrnak
Budapest, Nádor u. 51. V. em.**

Kiválóan Tisztelt és Kedves Tanártársam !

Íme Riesz Frigyes társunk már javában megkezdte itteni működését nagy lelkesedéssel a math. szeminárium körül is. ... Tegnap levelet kaptam Haartól. ... Egyébiránt Haar levele oly mély hazafias érzelmeket árul el, hogy mostmár nem is tartok attól, hogy ha egyszer haza került, elveszítsük a külföldnek....

**Boldog életet kívánok új lakásában
Igaz barátja, Farkas Gyula”
[8].**

[8] Prékopa András, Farkas Gyula élete és munkásságának jelentősége az optimalizálás elméletében. In Martinás Katalin (Szerk.), *Farkas Gyula élete és munkássága*. (ELFT Termodinamikai Szakcsoport, Budapest, 2003) pp 9-26.

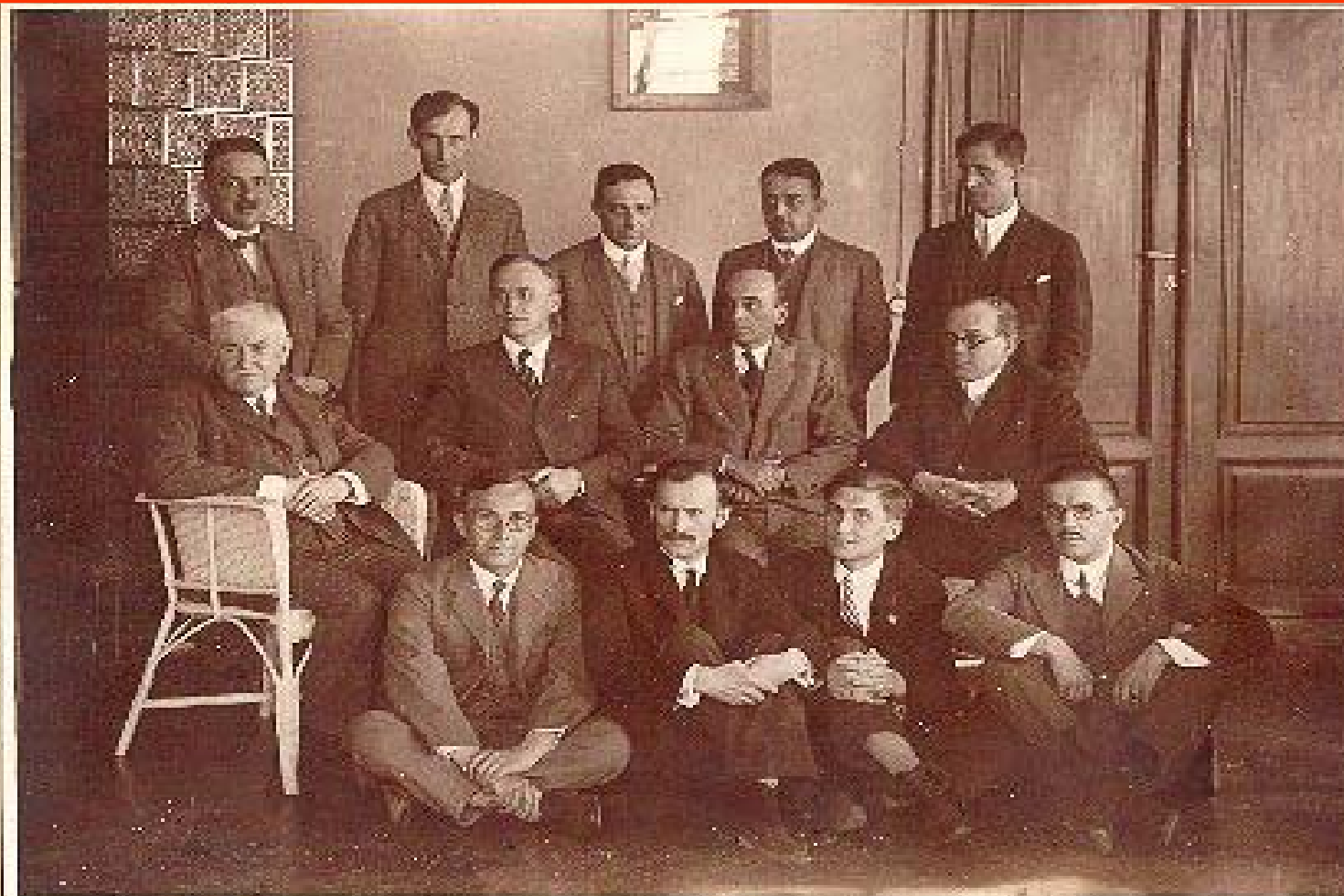
„ Az első világháború elvesztése következtében Erdély román megszállás alá került. A román hatóságok, nem várva meg a békekötést, az egyetem tanári karától hűségesküti kérétek, majd ennek megtagadása miatt az egyetemet Kolozsvárról kiutasították. Az egyetem 1919-ben átmenetileg Budapestre került, s a jogfolytonosság fennmaradása érdekében a hasonló sorsú pozsonyi Erzsébet Egyetemmel közös félévet hirdetett meg és indított....

A menekült egyetem az 1921/22-es tanévtől kezdődően Szegeden talált otthonra. ... Az oktatás megindításán túl Riesz és Haar fáradhatatlan szervező munkába kezdett a kutatáshoz és oktatáshoz elengedhetetlenül szükséges könyvek valamint folyóiratok beszerzése és gyarapítása érdekében is. Ma látjuk igazán, hogy ezen a területen is zseniálisak voltak. ... A Vallás- és Közoktatásügyi Minisztériumnál sikerült elérni, hogy Demeczky Mihály értékes matematikai könyvtárát megvásárolják, Farkas Gyula pedig a Matematikai Szemináriumnak ajándékozta saját könyvtárát. A helyzetet - és a küzdelmet - jellemzi a következő anekdotikus igaz történet. Haar professzor, aki igen jó viszonyban volt Klebelsberg Kunóval, ecsetelte a miniszternek, milyen katasztrofális az Intézet könyvvel és folyóirattal való ellátottsága. Klebelsberg kinyomoztatta, hogy van egy Hámori Bíró Pál nevű gyáros, egyben országgyűlési képviselő, aki "Hámori" előnévéért tartozik az államnak 25.000 pengővel. Közbenjárt, hogy ezt az összeget Bíró a szegedi egyetem Matematikai Szemináriumának utaltassa át a könyvtár gyarapítására

Az igazi fejlődést és színvonalat azonban a folyóiratgyűjtemény jelentette. Riesz és Haar felvetették, hogy matematikai folyóiratot kellene indítani, mégpedig nem akármilyet, hanem világszínvonalút. Erre az anyagi fedezetet egy társadalmi egyesület létrehozásával teremtették meg. A város nagyjai és tehető s polgárai létrehozták a Ferencz József Tudományegyetem Barátainak Egyesületét. Riesz és Haar levélben fordultak a világ ismert matematikusaihoz, akik közt sokan személyes ismerőseik voltak, és cikket kértek tőlük. Ők maguk is itt helyezték el legjobbnak tartott publikációikat , és erre kérték arra érdemes tanítványaikat: Radó Tibort, Szőkefalvi-Nagy Gyulát és másokat is. Így sikerült néhány év alatt világszínvonalúvá fejleszteni a lapot. Ragadjunk ki néhány nevet a fiatal Acta köteteiből: Fejér Lipót, Neumann János, Pólya György, Szegő Gábor, Riesz Marcell, Lánosz Kornél, Norbert Wiener, George D. Birkhoff, Henri Cartan, Antoni Zygmund, Egerváry Jenő, a még egyetemi hallgató Erdős Pál és természetesen a helyiek: Riesz, Haar, Kerékjártó”

[Csákány Béla – Varga Antal , A szegedi egyetemi matematikai intézetek hetvenöt éve.]

Matematikai konferencia Szegeden 1928-ban.



álló sor: Riesz Frigyes, Kerékjártó Béla, Haar Alfréd, König Gyula, Ortway Rudolf · ülő sor: Kürschák József, George D. Birkhoff, O. D. Kellog, Fejér Lipót · szőnyegen ülő sor: Radó Tibor, Lipka István, Kalmár László, Szász Pál

[Csak zárójelben...; Egy nagy konferencia 2014-ben.]

XXXXX (Conference name, which I do not display) „ is dedicated to providing a harassment-free conference experience for everyone. We do not tolerate harassment of conference participants in any form. Conference participants violating this rule may be sanctioned or expelled from the conference without a refund at the discretion of the conference organizers.

Harassment includes:

- offensive verbal comments related to gender, gender identity and expression, sexual orientation, disability, physical appearance, body size, race, religion;
- sexual images in public spaces;
- deliberate intimidation, stalking, following, harassing photography or recording;
- sustained disruption of talks or other events;
- inappropriate physical contact, and unwelcome sexual attention.

Participants asked to stop any harassing behaviour are expected to comply immediately.

Exhibitors in the Industrial Exhibition are also subject to the anti-harassment policy. In particular, exhibitors should not use sexualized images, activities, or other material. Booth staff (including volunteers) should not use sexualized clothing/uniforms/costumes, or otherwise create a sexualized environment.

If a participant engages in harassing behaviour, the conference organizers may take any action they deem appropriate, including warning the offender or expulsion from the conference with no refund. If you are being harassed, notice that someone else is being harassed, or have any other concerns, please contact a member of conference staff immediately.

Conference staff will be happy to help participants contact hotel/venue security or local law enforcement, provide escorts, or otherwise assist those experiencing harassment to feel safe for the duration of the conference. We value your attendance.

We expect participants to follow these rules at all conference venues and conference-related social events.”

Néhány másolat Haar egyetemi előadásjegyzeteiből.

„ Egyetemi előadásainak tárgyát Haar leginkább az algebra számelmélet, analitikus geometria, mechanika, differenciálegyenletek, variációszámítás, folytonos csoportok elmélete területeiről választotta. Elsőrangú egyetemi előadó volt, előadásai világosságban, logikus felépítésben mintaszerűek voltak. ...”. „Haar Alfrédtől könyv nem jelent meg. Azonban több igen gondosan megírt jegyzetet készített, részben saját előadásaira való előkészületként, részben hallgatóinak használatára (Számelmélet, Algebra, Determinánsok és quadratikus formák, Vektor- és tenzoranalízis, Felsőbb geometria, Felületelmélet, Elemi függvénytan, Differenciálegyenletek, Variációszámítás, Valószínűségszámítás). Noha ezek az egyetemi előadások sok eredeti részletet tartalmaznak, s mint egyetemi tankönyvek ma is beválnának, a jelen összegyűjtött munkák közé való felvételükről már csak terjedelmük miatt sem lehetett szó.”

[1] Haar A, *Összegyűjtött Munkái*. Sajtó alá rendezte Szökefalvi-Nagy Béla (Akadémia Kiadó, Budapest, 1959). Bevezetés.

S. V., Haar Alfréd fizikai matematikája. „ Előadásunkban e nem publikált egyetemi jegyzetekből is mutatunk be (tudomásunk szerint a szélesebb tudományos közönség számára mindezidáig ismeretlen) szemelvényeket.”

Inr 3372

~~Szakioltár~~

Einführung in die Variationsrechnung.

Vorlesung; gehalten im Winter-Semester 1910-1911.

von

Dr. Haar.

Ausgearbeitet von

Fritz Frankfurter.

„Einführung in die Variationsrechnung. Vorlesung gehalten im Winter-Semester 1910-1911. von Dr. Haar. Ausgearbeitet von Fritz Frankfurter.“ „Bevezetés a variációszámításba. Az 1910-1911-es téli szemeszteren tartotta Dr. Haar. Kidolgozta Fritz Frankfurter.“

Wir gehen nun über zur 2-dimensionalen Variationsrechnung und behandeln als erstes Problem ihr einfachstes Beispiel, das ganz analog ist zu dem, was wir bei der dreidimensionalen Variationsrechnung an die Spitze gestellt hatten (Seite 12)

In der x, y -Ebene sei eine reguläre analytische Kurve gegeben. Sie soll doppelpunktfrei und geschlossen sein, sodass sie ein Gebiet der Ebene umschließt. Wir fassen sie auf als Projektion einer Raumkurve k . Das Problem lautet nun, unter allen Flächen, die durch k hindurchgehen, d. h. unter allen analytischen Funktionen zweier Variabler, die die Gleichungen von k erfüllen, diejenige

$$(1) \quad z = z(x, y)$$

zu bestimmen, für die das Doppelintegral

$$(2) \quad \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

minimal wird, wo D die von k umschlossene Fläche bedeutet.



Das ist das Dirichlet'sche Variationsproblem, das für die Funktionentheorie und Potentialtheorie besonders wichtig ist. Wir wollen wieder zunächst an diesem Beispiel die Theorie der zweidimensionalen Variationsrechnung entwickeln.

Wir gehen genau so vor wie bei der dreidimensionalen Var.-R. Zudem wir uns zunächst mehrere Flächen

durch k hindurchgelegt denken, erkennen wir durch Substitution ihrer nach z aufgelösten Gleichungen, dass wir eine jede von ihnen aus der anderen hervorgehen lassen können durch Hinzufügen einer Hilfsfunktion f von zwei Variablen x und y , die für die auf D gelegenen Wertepaare x und y verschwindet und sonst willkürlich ist. Auch ist immer gegeben f eine Funktion zweier Variabler, die so beschaffen ist, dass sie für die durch k repräsentierten Wertepaare x, y verschwindet oder, geometrisch gesprochen, dass sich die Fläche f und die x, y -Ebene in k durchsetzen, dann ist $z + f$ wieder eine Funktion der Kurvenkurve, wenn z es war, und $z + f$ ist ebenfalls eine Funktion der Kurvenkurve, wo f eine Konstante bedeutet. Es folgt unmittelbar daraus, dass f auf der Randkurve k überall verschwindet, sodass $z + f$ dort dieselben k angehörigen Werte annimmt wie z . Also auch hier liefert nur die „zulässige Variation“ f alle Funktionen der Kurvenkurve und nur diese.

Nun sei $z = z(x, y)$ die Bahnkurve des vorgelegten Problems. Dann bilden wir das Integral einer anderen Kurvenwertigen Funktion $z + f$, erstreckt über den Bereich D , und betrachten es als Funktion von f . Für $f = 0$ muss es, damit z wirklich die Bahnkurve sei, seinen kleinsten Wert annehmen, sodass wir haben:

Inr 3380

Szakleltár

00/a

Vektor és tenzoranalízis.

Dr. Haar Alfréd

egyetemi ny. t. tanár és szemináriumi előadó
1923/24 tanévben.

Jegyzte: Hartly Domokos tanárjelölt.

- 1. §. A gradient és divergencia képzés elv. és másodrendű tenzorok. A metrikus tenzor gradientje és divergenciája. 51. old.
- 2. §. A Riemann-Christoffel-féle görbületi tenzor. A Riemann-féle görbületi tenzor. A kovariáns görbület. A Riemann-Christoffel-féle görbületi tenzor szimmetria sajátosságai. 63. old.



Tartalom:

I. Fejezet. Vektorok.

- 1. §. Pont, távolság, vektor, vektor hossza, iránymenti differenciálhányados, Gauss-féle probléma, Whom, Cartesius-féle koordinátarendezésre vonatkoztatott euklideszi térben. 1. o.
- 2. §. Két euklideszi térbeli egyenásra való leképezés. A vektor kontravariáns és kovariáns képe, az orok hirt. összefüggés. 7. o.
- 3. §. Az euklideszi tér általános koordinátarendezése vonatkoztatva. A vektor kontravariáns és kovariáns komponensei, az orok hirt. összefüggés, vektor hossza és irány. Általános általános koordinátarendezést általános koordinátarendezésre. 11. o.
- 4. §. Nem euklideszi tér, affin tér, metrikus tér. Goldsch a kontravariáns és kovariáns vektorra. 16. o.

II. Fejezet. Tenzorok.

- 1. §. A másodrendű tenzor. A tenzor komponensek transformációja. A tenzor komponensek összefüggése. A tenzor szimmetriája. A metrikus tenzor. Tenzorok skaláris szorzata. A megfigyelt. 21. o.
- 2. §. A harmadrendű tenzor. 32. o.

III. Fejezet. Vektor és tenzor analízis.

- 1. §. A mozgás mentén definiált vektormező. A vektor mozgásművet differenciálhányadosa és euklideszi általánosítás, a hirt. vektor. A eltérés. A geo. 39. o.

Haar A, Vektor és Tenzoranalízis. Dr. Haar Alfréd egyetemi ny. R. Tanár úr szemináriumi előadásai a 1923/24 tanévben. Jegyzte: Hartly (?) Domokos tanárjelölt. [77 oldal].

Végül 41 és 37 segítségével következik az

$$(45) \quad R_{\alpha\beta\gamma} + R_{\beta\gamma\alpha} + R_{\gamma\alpha\beta} = 0$$

szimmetria reláció.

Riemann, vizsgálatainak körében, az R_{ik} második rendű tenzorra jutott rá. És pedig úgy, hogy a tér tetszőleges pontjában felvett két vektort (l^{α}, m^{α}) és az ezekből lineárisan adódó összes irányokat. Aztán vette az összes irányokban az O ponton áthaladó geodetikus görbéket, amelyek egy geodetikus felületet (két dimenziós felületet) alkotnak. Ennek a felületnek képezte a görbületét az O pontban és ki-mutatta róla, hogy

$$R = \sum_{\alpha, \beta} R_{\alpha\beta} l^{\alpha} m^{\beta},$$

ahol R_{ik} a róla dueressett görbületi tenzor.

I. füzet



Variációszámítás

Dr. Haar Alfréd
egyetemi ny. rendes tanár előadásai
nyomán jegyezte

Bukovszky Ferenc
tanárjelölt



Haar A, Variációszámítás. Dr. Haar Alfréd egyetemi ny. rendes tanár előadásai nyomán jegyezte Bukovszky Ferenc tanárjelölt. [I. Füzet 61 o., II. Füzet 77 o.]. "Befejeztem 1929. május 22-én."

Ha a függvény változó kicsinyítés, ha az is value, akkor mozgás görbére value is.

$$F + \lambda G = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - U + \lambda G$$

1. egyenlet $-U_x + \lambda G_x = m \dot{x}$

2. egyenlet $-U_z + \lambda G_z = m \dot{z}$

A jobboldalon áll a tömeg és gyorsulás szorzata, a baloldalon elő tagjai a külső erő komponensei $-U_x, -U_z$ a második tagok a reakcióerő komponensei $\lambda G_x, \lambda G_z$

Izért a normális iránykomponensével prainyosodó lévén a reakcióerő merőleges a felületre.

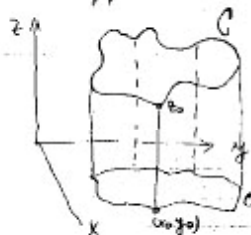
Így az erő nagysága

$$\sqrt{\lambda^2(G_x^2 + G_z^2)}$$

tehát λ a reakcióerő nagyságát méri.

Doppel integrálás. Itt a v. probléma lényege az, ahelyett két független változó is egy ismeretlen függvény szerepel.

Azért van egy feltétel, ezen nagyon különleges felületet tudunk felírni. Kérdés, hogy hogyan lehet a felületet leírni legkisebb. Szögletes esetben a megoldás az, hogy a felületet minimalfelületnek vesszük.



$z = z(x, y)$ a felület

azaz olyan felületet jellemezünk, amelyen a C körben mindenütt az az jelenti, hogy a függvény a C körben mindenütt egyenlő. Így kell választani a felületet, azaz

$$z(x_0, y_0) = z_0$$

A felület formula

$$\iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

diese genügt ebenfalls der Gleichung

$$\chi(A_1)\chi(A_2) = \chi(A_1 A_2)$$

ist als wiederum eine der obigen Gruppencharaktere. Allgemein folgt daraus dass

$$\chi = \chi_1^{\alpha_1} \chi_2^{\alpha_2} \dots \chi_n^{\alpha_n}$$

wiederum eine der obigen Funktionen $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ ist, wie auch die ganzzahligen Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ gewählt sind. Man kann aus sagen, dass die Gruppencharaktere eine Gruppe bilden; es ist auch leicht zu zeigen, dass diese Gruppe der Verknüpfung isomorph (und zwar in mannigfacher Weise) ist.

11) Basis der Abelschen Gruppe.

Es sei $\chi(A)$ irgendein Gruppencharakter und $\chi(A_p) = a_p$.

($a_1, a_2, \dots, a_n$ eine Zeile der obigen Matrix (A)). Da a_p eine m -te Einheitswurzel ist, so kann man

$$a_p = e^{\frac{2\pi i}{m} x_p}$$

setzen wo x_p eine der ganzen Zahlen

$$0, 1, 2, \dots, m-1$$

ist, und es ist auch

$$a_p = e^{\frac{2\pi i}{m} (x_p + m_p)}$$

wo $m_p \equiv 0 \pmod{m}$ ist. Die ganzen Zahlen

$$x_1 + m_1, \quad x_2 + m_2, \quad \dots, \quad x_n + m_n$$

definieren daher den zugrunde gelegten Gruppencharakter vollständig; dabei sind die $x_1, x_2, \dots, x_n$ feste Zahlen, $m_1, m_2, \dots, m_n$ aber beliebige durch m teilbare ganze Zahlen. (Beim Hauptcharakter ist $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$). Indem wir die für jeden Gruppencharakter vorliegenden Größen $x_1, x_2, \dots, x_n$ zu einer Tabelle ($p=1, 2, \dots, n$)

$$\chi_p(A): \quad x_1 + m_1, \quad x_2 + m_2, \quad \dots, \quad x_n + m_n,$$

deren Element in einem n -dimensionalen Raum als Punkte gedeutet werden können.

Man erhält so unendlichviele ganzzahlige Punkte; diese bilden ein Gitter, da die Summe und Differenz zweier Zeilen der obigen Tabelle wiederum eine Zeile der Tabelle ergibt entsprechend der Tatsache, dass das Produkt zweier Gruppencharaktere wieder ein Gruppencharakter ist. Desgleichen bilden auch die Spalten der obigen Tabelle einen Modul, da diese aus den Größen

§4 Der Poincaré'sche Wiederkehersatz

a) Die Voraussetzungen des Theorems. Eine der wichtigsten Anwendungen des Liouville'schen Satzes ist der sog. Wiederkehersatz von Poincaré; dies ist einer der tiefgefundesten Sätze über Differentialgleichungen, der seine Fruchtbarkeit den mannigfachen Anwendungen auf die Naturwissenschaften verdankt, die sich heute Gegenstand der ^{mathematischen} Diskussion sind. Wir kommen nun zu der Darlegung dieses Theorems.

Wir betrachten zu diesem Zwecke ein System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, \dots, n)$$

in dem die Differentialgleichungen die ausführende Veränderliche nicht enthalten, und die die Bedingung

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 0$$

erfüllen, so dass nach dem Liouville'schen Satze - die aus einem Gebiet G_0 des n -dimensionalen Raumes ausgehenden Integralkurven für den Wert von t ein Gebiet G_t vom gleichen Volumen ausfüllen.

Wir nehmen ferner an - und dies ist die Hauptaussage - dass in dem n -dimensionalen Raum R_n ein ^{n -dimensionaler} Gebiet G vom endlichen Volumen existiert, von der Gestalt, dass jede Integralkurve, die durch einen Punkt von G hindurchgeht, in ihrer Gesamtheit immer ganz G bleibt. Dies hat beispielsweise statt, wenn eine Integralkurve existiert, die eine Gebiet vom endlichen Volumen abgrenzt, ob

eine Integralkurve am einen Integralkurve nicht darstellt werden kann.

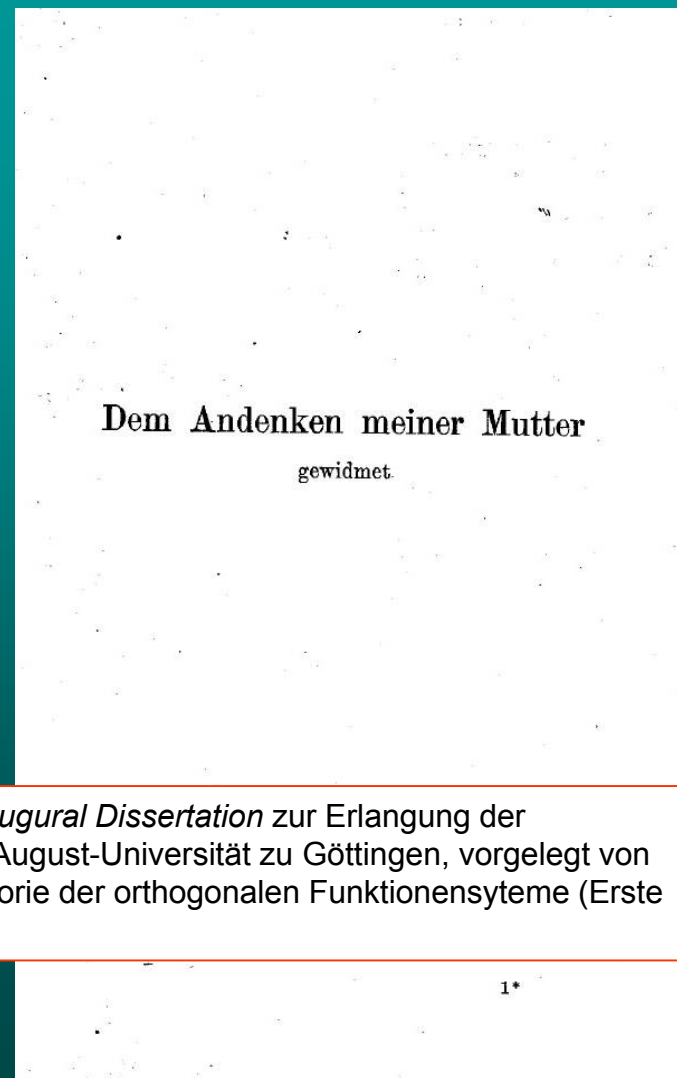
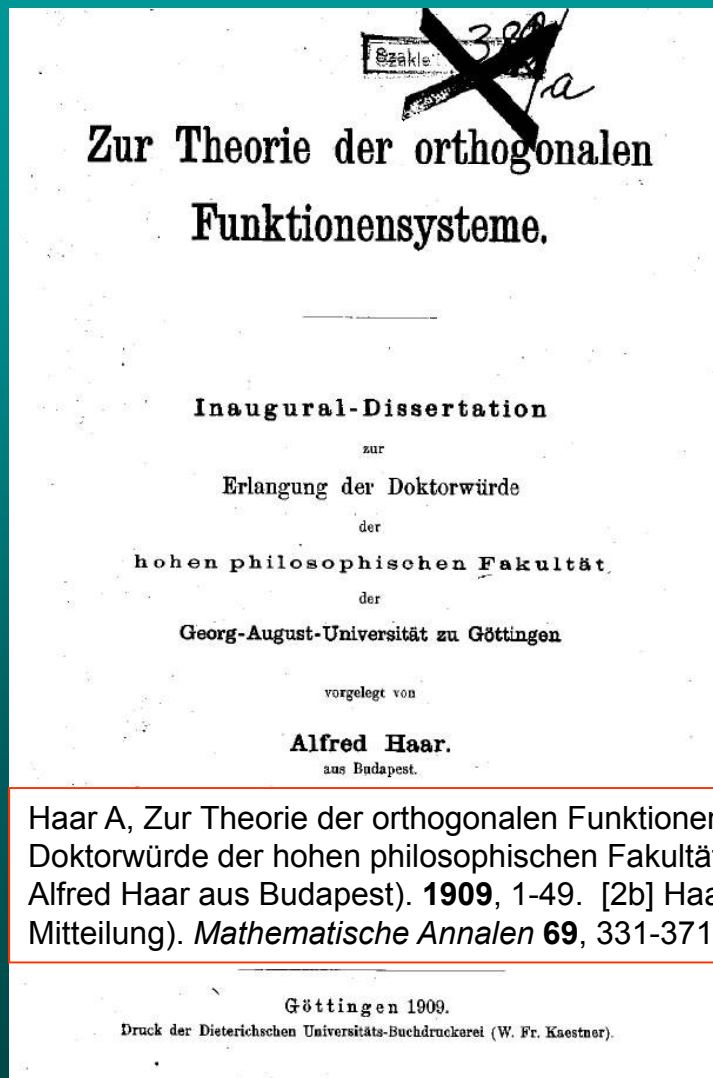
Stimmt man die hydrodynamische Bedeutung der Differentialgleichung, so bedeutet unsere Annahme, dass die betrachtete Flüssigkeit ^{unverwundbar} inkompressibel und inkompressibel ist, und dass G ein "Sektor" bedeutet, das die Flüssigkeit nicht durchdringt. In der Terminologie der Theorie der Transformationen sagen unsere Bedingungen aus, dass die Transformationen der betrachteten Gruppe "volumetrisch" sind und dass G ein invariantes Gebiet der Gruppe bedeutet.

In der Tat, jeder Punkt von G kann durch eine Transformation der Gruppe wiederum nur in einen Punkt von G übergehen, da die Integralkurve durch den betrachteten Punkt in ihrer Gesamtheit in G bleibt. G kann aber durch keine Transformation der Gruppe auf einen ersten Teil G' von G abgebildet werden; andernfalls würde die inverse Transformation G' in G überführen und daher den übrigen Teilenden Teil ($G-G'$) von G in eine ausserhalb G liegende Gebiet - was der Annahme widerspricht. Jeder Punkt G bleibt - bei jeder Transformation der Gruppe invariant.

Poincaré bedient sich bei dem Beweise seines Theorems der hydrodynamischen Bedeutung. Zusätzliches erfordert nur aber die Interpretation der Lösung vermöge der Transformationsgruppe,

A Haar-féle ortogonális függvényrendszer.

Haar Alfréd doktori disszertációja (Göttingen, 1909).



Haar A, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (*Inaugural Dissertation* zur Erlangung der Doktorwürde der hohen philosophischen Fakultät der Georg-August-Universität zu Göttingen, vorgelegt von Alfred Haar aus Budapest). **1909**, 1-49. [2b] Haar A, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Erste Mitteilung). *Mathematische Annalen* **69**, 331-371 (1910).

Inhalt.		Seite
Einleitung		331
Kapitel I.		
Divergente Reihen.		
§ 1. Ein allgemeines Kriterium		335
§ 2. Anwendung auf die Sturm-Liouvilleschen Reihen		339
§ 3. Anwendung auf die Kugelfunktionen		345
Kapitel II.		
Theorie der Summation.		
§ 1. Ein Hilfssatz		349
§ 2. Anwendung auf die Theorie der trigonometrischen und Sturm-Liouvilleschen Reihen		352
§ 3. Die Summation der Sturm-Liouvilleschen Reihen		356
§ 4. Verallgemeinerungen		359
Kapitel III.		
Über eine Klasse von orthogonalen Funktionensystemen.		
§ 1. Das orthogonale Funktionensystem χ		361
§ 2. Entwicklungen nach dem orthogonalen Funktionensystem χ		363
§ 3. Weitere Eigenschaften des orthogonalen Funktionensystems χ		368
§ 4. Verschiedene Verallgemeinerungen		369

‘Haar wavelets’

[2b] Haar A, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Erste Mitteilung). *Mathematische Annalen* 69, 331-371 (1910). * Die vorliegende Arbeit ist, bis auf unwesentlichen Änderungen, ein Abruck meiner im Juli 1909 erschienenen Göttinger Inauguraldissertation. [2c] Haar A, Zweite Mitteilung; *ibid.* 71, 38-53 (1911)

Das orthogonale Funktionensystem χ .

Das vollständige orthogonale Funktionensystem χ , den einfachsten Repräsentanten jener Klasse von Orthogonalsystemen, definieren wir wie folgt:

Es sei $\chi_0(s) = 1$ im ganzen Intervall $[0, 1]$ einschließlich der Grenzen; sodann sei:

$$\begin{aligned}\chi_1(s) &= 1 \quad \text{für } 0 \leq s < \frac{1}{2}, \\ &= -1 \quad \text{für } \frac{1}{2} < s \leq 1.\end{aligned}$$

Wir setzen ferner:

$$\begin{aligned}\chi_2^{(1)}(s) &= \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \chi_2^{(2)}(s) = 0 \quad \text{für } 0 \leq s < \frac{1}{4}, \\ &= -\sqrt{2} \quad \quad \quad = 0 \quad \text{„} \quad \frac{1}{4} < s < \frac{1}{2}, \\ &= 0 \quad \quad \quad = \sqrt{2} \quad \text{„} \quad \frac{1}{2} < s < \frac{3}{4}, \\ &= 0 \quad \quad \quad = -\sqrt{2} \quad \text{„} \quad \frac{3}{4} < s \leq 1.\end{aligned}$$

Auf diese Weise fahren wir fort; allgemein definieren wir die Funktionen unseres Systems folgendermaßen: Wir teilen das Intervall $[0, 1]$ in 2^n gleiche Teile und bezeichnen diese Teilintervalle der Reihe nach mit $i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \dots, i_n^{(2^n)}$. Wir setzen nun:

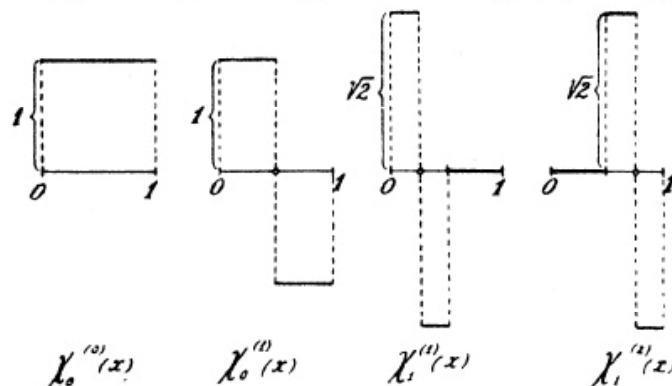
$$\begin{aligned}\chi_n^{(k)} &= 0 \quad \text{innerhalb der Intervalle } i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \dots, i_n^{(2^{k-1})}; \\ &= \sqrt{2^{n-1}} \quad \text{innerhalb des Intervalles } i_n^{(2^k-1)}; \\ &= -\sqrt{2^{n-1}} \quad \text{innerhalb des Intervalles } i_n^{(2^k)}; \\ &= 0 \quad \text{innerhalb der Intervalle } i_n^{(2^k+1)}, \dots, i_n^{(2^n)} \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}).\end{aligned}$$

‘Haar wavelets’.
A ‘Haar – féle
ortogonális
függvényrendszer’

[2b] Haar A, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Erste Mitteilung). *Mathematische Annalen* 69, 331-371 (1910). * Die vorliegende Arbeit ist, bis auf unwesentlichen Änderungen, ein Abruck meiner im Juli 1909 erschienenen Göttinger Inauguraldissertation. [Kapitel III. 1§]

E függvények a $[0, 1]$ szakaszon vannak értelmezve, és így jelöljük őket:

$$\chi_0^{(0)}(x) \equiv 1; \chi_0^{(1)}(x); \chi_1^{(1)}(x), \chi_1^{(2)}(x); \dots; \chi_n^{(1)}(x), \dots, \chi_n^{(2^n)}(x); \dots$$



37. ábra

Értelmezésük a következő:

$$\chi_0^{(1)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{ha } x = \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{ha } \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

$$\chi_1^{(1)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ -\sqrt{2}, & \text{ha } \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{a többi pontokban,} \end{cases} \quad \chi_1^{(2)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}, \\ -\sqrt{2}, & \text{ha } \frac{3}{4} < x \leq 1, \\ 0 & \text{a többi pontokban,} \end{cases}$$

3. 4. Haar-féle ortogonális rendszer

További példaként ortogonális függvényrendszerre ismerjük meg a több szempontból is nevezetes Haar-féle ortogonális rendszert, melyet HAAR ALFRÉD*) doktori disszertációjában közölt, 1909-ben.

*) HAAR ALFRÉD (1885 – 1933) a kolozsvári, majd a szegedi egyetem tanára volt. Egyike volt azoknak a magyar matematikusoknak, akiknek művei nagy hatást gyakoroltak a matematika legújabb fejlődésére. Különösen fontos eredménye az ún. „Haar-féle mérték” felfedezése.

Az első referencia: Faber [1910] újrabizonyítja a Haar-rendszer teljességét.

Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar.

Von GEORG FABER in Tübingen.

In seiner interessanten Dissertation²⁾ hat Herr Haar ein System von Funktionen

$$(1) \quad \chi_0(s); \chi_1(s); \chi_2^{(1)}(s), \chi_2^{(2)}(s); \chi_3^{(1)}(s), \chi_3^{(2)}(s), \chi_3^{(3)}(s), \chi_3^{(4)}(s), \dots \chi_n^{(k)}(s) \dots$$
$$(k=1, 2, \dots, 2^{n-1})$$

aufgestellt, welche im Intervalle $0 \leq s \leq 1$ eindeutig definiert sind und der „Orthogonalitätsbedingung“

$$(2) \quad \int_0^1 \chi_n^{(k)}(s) \chi_n^{(x)}(s) ds = 0$$

1) Über invariante Gebilde quaternärer Formen. Wiener Berichte. Bd. 98. 1889.

2) Göttingen 1909; s. Kapitel III, S. 37.

mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null überall existiert und mit $f(s)$ übereinstimmt, so folgt daraus: die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Funktionen unseres Orthogonalsystems konvergiert an jeder Stelle mit Ausnahme einer Punktmenge vom Maße Null.

Ist aber $f(s)$ an jeder Stelle des Intervalls stetig, so ist bekanntlich für jede Stelle ohne Ausnahme

$$f(s) = \frac{d}{ds} \left(\int_0^s f(t) dt \right),$$

d. h. die Fourier-Entwicklung einer beliebigen stetigen Funktion (in bezug auf unser Orthogonalsystem χ) konvergiert an jeder Stelle des Intervalls $[0, 1]$.*)

*) In einer kürzlich in den „Jahresberichten der deutschen Mathematiker-Vereinigung“ (1910) erschienenen Note hat Herr Faber mein Orthogonalsystem zum Gegenstande seiner Untersuchungen gemacht und leitet meine Sätze von neuem ab. Sein Beweisverfahren ist aber von dem hier gegebenen nicht wesentlich verschieden.

A Haar-rendszer tulajdonságai: „FRAME”.

§ 3.

Weitere Eigenschaften des orthogonalen Funktionensystems χ .

Wir wollen jetzt einige weitere Eigenschaften unseres Funktionensystems ableiten, die jenen Sätzen der Theorie der trigonometrischen Reihen entsprechen, die man dort durch verschiedene Summationsmethoden erhält.

Aus dem Umstande, daß die Funktionen $K_n^{(p)}(s, t)$ stets positiv sind, schließen wir folgenden Satz:

Bleibt die im Intervall $[0, 1]$ im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion $f(s)$ zwischen den Grenzen m und M :

$$m \leq f(s) \leq M,$$

so bleiben auch alle Teilsummen der in bezug auf χ gebildeten Fourier-Reihe von $f(s)$ zwischen diesen Grenzen:

$$m \leq [f(s)]_n^{(p)} \leq M.$$

In der Tat, es ist z. B.

$$[f(s)]_n^{(p)} = \int_0^1 K_n^{(p)}(s, t) f(t) dt \leq M \int_0^1 K_n^{(p)}(s, t) dt = M.$$

A Haar-rendszer tulajdonságai: „Lokalitás”. [Később (1946) Gábor Dénes példája.]

die Konvergenz der in bezug auf χ gebildeten Fourier-Reihe einer willkürlichen Funktion an der Stelle $s = a$ nur von dem Verhalten dieser Funktion in der Umgebung dieser Stelle abhängt. 

Stimmen die Funktionen $f(s)$ und $g(s)$ in einem noch so kleinen Intervalle überein, so kann man einen Index N so angeben, daß, sobald $n > N$ ist, alle $[f(s)]_n^{(p)}$ und $[g(s)]_n^{(p)}$ in diesem Intervall ebenfalls übereinstimmen.

In Verbindung mit dem Hauptsatze des vorigen Paragraphen liefern diese letzten Ergebnisse den folgenden Satz: Die in bezug auf χ gebildete Fourier-Reihe einer Funktion $f(s)$ konvergiert an jeder Stetigkeitsstelle von $f(s)$ gegen diese Funktion.

[2b] Haar A, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Erste Mitteilung). *Mathematische Annalen* 69, 331-371 (1910).

THEORY OF COMMUNICATION*

By D. GABOR, Dr. Ing., Associate Member.†

(The paper was first received 25th November, 1944, and in revised form 24th September, 1945.)

PREFACE

The purpose of these three studies is an inquiry into the essence of the "information" conveyed by channels of communication, and the application of the results of this inquiry to the practical problem of optimum utilization of frequency bands.

In Part 1, a new method of analysing signals is presented in which time and frequency play symmetrical parts, and which contains "time analysis" and "frequency analysis" as special cases. It is shown that the information conveyed by a frequency band in a given time-interval can be analysed in various ways into the same number of elementary "quanta of information," each quantum conveying one numerical datum.

In Part 2, this method is applied to the analysis of hearing sensations. It is shown on the basis of existing experimental material that in the band between 60 and 1 000 c/s the human ear can discriminate very nearly every second datum of information, and that this efficiency of nearly 50% is independent of the duration of the signals in a remarkably wide interval. This fact, which cannot be explained by any mechanism in the inner ear, suggests a new phenomenon in nerve conduction. At frequencies above 1 000 c/s the efficiency of discrimination falls off sharply, proving that sound reproductions which are far from faithful may be perceived by the ear as perfect, and that "condensed" methods of transmission and reproduction with improved waveband economy are possible in principle.

In Part 3, suggestions are discussed for compressed transmission and reproduction of speech or music, and the first experimental results obtained with one of these methods are described.

A Rademacher –rendszer [1922] nem teljes, ellentétben a Haar-rendszerrel.

Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen.

Von

Hans Rademacher in Hamburg.

Einleitung.

Der Riesz-Fischersche Satz, der besagt, daß es zu jeder Folge von reellen Zahlen $c_1, c_2, c_3, \dots, c_v, \dots$ mit konvergenter Quadratsumme eine höchstens bis auf eine Nullmenge bestimmte Funktion $f(x)$ gibt, deren Fourierkoeffizienten in bezug auf ein vorgegebenes System von Orthogonalfunktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_v(x), \dots$ die Zahlen c_v sind, hat eine Reihe von Versuchen hervorgebracht, jene Funktion $f(x)$ in rechnerisch einfache Beziehung zu den c_v und den $\varphi_v(x)$ zu setzen. Das allgemeinste Ergebnis in dieser Richtung ist wohl der Satz von Weyl¹⁾, nach dem man aus der Reihe

$$(1) \quad c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots$$

stets eine fast überall konvergente Folge von Teilsummen auswählen kann, deren Limesfunktion, wie man leicht sieht, die vom Riesz-Fischerschen Satz behaupteten Eigenschaften besitzt. Dieser Weylsche Satz soll im folgenden dahin präzisiert werden, daß zu vorgelegter konvergenter Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} c_v^2$ die Indizes der Teilsummen einer konvergenten Folge explizite angegeben werden.

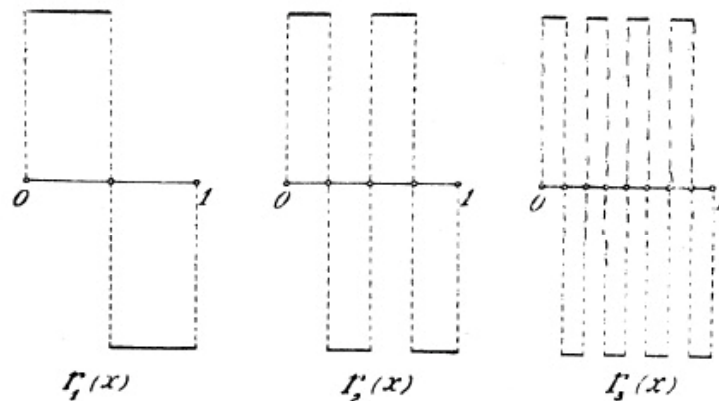
Rademacher H, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen. *Mathematische Annalen* 87, 112-138 (1922)

3.5. Rademacher-féle rendszer

Különösen bizonyos valószínűség-számítási alkalmazásai miatt bír jelentőséggel a következő, Rademacher-féle ortogonális rendszer a $[0, 1]$ intervallumon:

$$r_0(x) = 1, \quad r_k(x) = \operatorname{sgn}(\sin 2^k \pi x) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Ha tehát a $[0, 1]$ intervallumot 2^k egyenlő részre osztjuk, akkor $r_k(x)$ ezekben felváltva a $+1$ és a -1 értékeket veszi fel, a $0, 1$ végpontokban és az osztópontokban pedig az értéke 0 ($k \geq 1$).



38. ábra

Ez a rendszer ortogonális. Legyen $m > n \geq 0$. Ekkor minden olyan I szakasz, amely $r_n(x)$ két szomszédos ugrási helye közé esik, és amelyen tehát $r_n(x)$ állandóan $+1$ vagy -1 , az $r_m(x)$ függvénynek páros számú (pontosan 2^{m-n}) konstansintervallumát tartalmazza: ezek felén az $r_m(x)$ értéke $+1$, felén pedig -1 , és így

A derivative of Haar's system [1909]: The Walsh orthogonal system [1922].

A CLOSED SET OF NORMAL ORTHOGONAL FUNCTIONS.*

BY J. L. WALSH.

Introduction.

A set of normal orthogonal functions $\{\chi\}$ for the interval $0 \leq x \leq 1$ has been constructed by Haar,[†] each function taking merely one constant value in each of a finite number of sub-intervals into which the entire interval $(0, 1)$ is divided. Haar's set is, however, merely one of an infinity of sets which can be constructed of functions of this same character. It is the object of the present paper to study a certain new closed set of functions $\{\varphi\}$ normal and orthogonal on the interval $(0, 1)$; each function φ has this same property of being constant over each of a finite number of sub-intervals into which the interval $(0, 1)$ is divided. In fact each function φ takes only the values $+1$ and -1 , except at a finite number of points of discontinuity, where it takes the value zero.

The chief interest of the set φ lies in its similarity to the usual (e.g., sine, cosine, Sturm-Liouville, Legendre) sets of orthogonal functions, while the

The Haar system [1909]. The Walsh system [1922]. The Rademacher system [1922].

The set χ is known to be closed;* it follows from the expression of the χ in terms of the φ that the set φ is also closed.

The definition of the functions $\varphi_n^{(k)}$ enables us to give a formula for $\varphi_n^{(k)}(x)$. Let us set, in binary notation,

$$x = \frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots, \quad a_i = 0 \text{ or } 1.$$

If x is a binary irrational or if in the binary expansion of x there exists $a_i \neq 0, i > n$, the following formulas hold for $\varphi_n^{(k)}$:

$$\begin{array}{ll} \varphi_0 = 1, & \varphi_1 = (-1)^{a_1}, \\ \varphi_2^{(1)} = (-1)^{a_1+a_2}, & \varphi_2^{(2)} = (-1)^{a_2}, \\ \varphi_3^{(1)} = (-1)^{a_2+a_3}, & \varphi_3^{(2)} = (-1)^{a_1+a_2+a_3}, \\ \varphi_3^{(3)} = (-1)^{a_1+a_3}, & \varphi_3^{(4)} = \dots \\ \varphi_4^{(1)} = (-1)^{a_3+a_4}, & \varphi_4^{(2)} = \dots \\ \varphi_4^{(3)} = (-1)^{a_1+a_2+a_3+a_4}, & \varphi_4^{(4)} = \dots \\ \varphi_4^{(5)} = (-1)^{a_2+a_4}, & \varphi_4^{(6)} = \dots \\ \varphi_4^{(7)} = (-1)^{a_1+a_4}, & \varphi_4^{(8)} = \dots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}$$

The general law appears from these relations;

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(1)} &= (-1)^{a_{n-1}+a_n} \\ \varphi_n^{(k)} &= \varphi_{k-1}^{(1)}. \end{aligned}$$

The Walsh system is also complete.

[Because it is derived from the Haar system.]

24

J. L. WALSH: *Normal Orthogonal Functions*.

Continuation in this way together with the Lemma shows that every a_n must vanish. This reasoning is typical and does not essentially depend on our numerical assumptions about x_1 . Then Theorem IX is proved.

The reasoning is precisely similar if instead of the hypothesis of Theorem IX we admit the possibility of a finite number of points in the neighborhood of each of which the convergence is not assumed uniform:

THEOREM X. *If the series*

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) + \cdots$$

converges to the sum zero uniformly, $0 \leq x \leq 1$, except in the neighborhood of a finite number of points, then $0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \cdots$.

HARVARD UNIVERSITY,
May, 1922.

A derivative of Haar's system [1909]: The Walsh orthogonal system [1922].

A REMARKABLE SERIES OF ORTHOGONAL FUNCTIONS (I). 241

A REMARKABLE SERIES OF ORTHOGONAL FUNCTIONS (I)

By R. E. A. C. PALEY.

[Received 29 April, 1931.—Read 14 May, 1931.]

1. We define a sequence of functions $\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_n(t), \dots$ by the following conditions:

$$\begin{aligned}\phi_0(t) &= 1 \quad (0 \leq t < \tfrac{1}{2}), \\ \phi_0(t) &= -1 \quad (\tfrac{1}{2} \leq t < 1), \\ \phi_0(t+1) &= \phi_0(t), \\ \phi_n(t) &= \phi_0(2^n t) \quad (n = 1, 2, \dots).\end{aligned}$$

We call the functions $\phi_n(t)$ Rademacher's† functions.

By means of Rademacher's functions, we define a new system as follows. Let $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_r}$; then we write $\psi_n(t) = 1$ and

$$(1.1) \quad \psi_n(t) = \phi_{n_1}(t) \phi_{n_2}(t) \dots \phi_{n_r}(t) \quad (n > 0).$$

This system has already been obtained in a different way by Walsh‡. Walsh has proved that the equation (1.1) defines a normalized set of orthogonal functions for the interval (0, 1). Every function $f(t)$ absolutely integrable in the interval (0, 1) can be expanded (quite formally) by means of the functions $\psi_n(t)$ in the form of a series

$$(1.2) \quad f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(t),$$

where the numbers c_n are defined by means of the equation

$$(1.21) \quad c_n = \int_0^1 f(t) \psi_n(t) dt.$$

† See Rademacher, 9; Khintchine, 6; Paley and Zygmund, 8; Kaczmarz and Steinhaus, 6.
‡ Walsh, 12.

242

R. E. A. C. PALEY

[May 14,

Walsh established a connection between the series (1.2) and the corresponding expansion in terms of another series of orthogonal functions. These are the Haar† system of orthogonal functions $\{\chi\}$, which are defined in the following way. We write

$$\begin{aligned}\chi_0(t) &= 1, \\ \chi_1(t) &= 1 \quad (0 \leq t < \tfrac{1}{2}), \\ \chi_1(t) &= -1 \quad (\tfrac{1}{2} \leq t < 1), \\ \chi_2^{(1)}(t) &= \sqrt{2}, \quad \chi_2^{(2)}(t) = 0 \quad (0 \leq t < \tfrac{1}{4}), \\ \chi_2^{(1)}(t) &= -\sqrt{2}, \quad \chi_2^{(2)}(t) = 0 \quad (\tfrac{1}{4} \leq t < \tfrac{1}{2}), \\ \chi_2^{(1)}(t) &= 0, \quad \chi_2^{(2)}(t) = \sqrt{2} \quad (\tfrac{1}{2} \leq t < \tfrac{3}{4}), \\ \chi_2^{(1)}(t) &= 0, \quad \chi_2^{(2)}(t) = -\sqrt{2} \quad (\tfrac{3}{4} \leq t < 1).\end{aligned}$$

We divide the interval into 2^n equal sub-intervals, and denote by $i_n^{(m)}$ the interval $(m-1)/2^n \leq t < m/2^n$. Then we define the n -th group of functions $\{\chi\}$ in the following way:

$$\begin{aligned}\chi_n^{(m)}(t) &= \sqrt{2^{n-1}} \text{ in the interval } i_n^{(2^{n-1})}, \\ &= -\sqrt{2^{n-1}} \text{ in the interval } i_n^{(2^m)}, \\ &= 0 \text{ elsewhere} \quad (m = 1, 2, \dots, 2^{n-1}).\end{aligned}$$

Walsh proves that, if the function $f(t)$ is expanded by means of the functions $\{\chi\}$ in a series

$$(1.3) \quad f(t) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^{n-1}} c_n^{(m)} \chi_n^{(m)}(t),$$

then the 2^n -th partial sums of the two series (1.2), (1.3) are equal. He is able to deduce a number of properties of the series (1.2) from the corresponding properties of the Haar orthogonal system. In a more recent paper‡ Kaczmarz uses the same method to obtain further properties of the system $\{\psi\}$. Most of the theorems which we obtain in this paper follow from a recent theorem of Hardy and Littlewood§ on averages.

We begin by giving a fresh proof that the system $\{\psi\}$ forms a normalized orthogonal system for the interval (0, 1); in other words that

$$(1.31) \quad \int_0^1 \psi_m(t) \psi_n(t) dt = 0 \quad (m \neq n), \\ = 1 \quad (m = n).$$

† Haar, 1.

‡ Kaczmarz, 4.

§ Hardy and Littlewood, 2.

Paley R E A C, A remarkable series of orthogonal functions (I). *Proc. London Math. Soc.* 34, 241-264 (1931).

A Set of Continuous Orthogonal Functions.

Von

Philip Franklin in Cambridge (Mass.) (U. S. A.).

1. Introduction.

There exist continuous functions for which, at some points of the interval of orthogonality the classical Fourier series fails to converge. The analogous expansions in orthogonal functions arising from the simpler boundary value problems seem to share this property with the Fourier expansion¹). This led A. Haar to ask if the property was common to all sets of orthogonal functions. He showed that it was not by exhibiting a set of orthogonal functions giving, as the expansion of any continuous function, a series converging uniformly to the function throughout the fundamental interval. The individual functions of his set, however, are *discontinuous*, so that his example does not exclude the possibility of the property being common to all sets of *continuous* orthogonal functions. In this paper we construct a set of continuous orthogonal functions similar to Haar's set in that the expansion of any continuous function represents the function everywhere.

‘Schauder-bázis’. Riesz ‘átviteli elvének’ alkalmazása. „Übertragungsprinzip”

Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems¹⁾.

Von

Juljusz Schauder in Lwów.

Satz I. Ist $f(x)$ eine im Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ erklärte und daselbst mit der α -ten Potenz des Betrages ($\alpha \geq 1$) im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion, so ist

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f(x) - \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)|^\alpha dx = 0,$$

wo $\{\varphi_i(x)\}$ das Haarsche Orthogonalsystem²⁾ und $\{c_i\}$ die „Fourier-Koeffizienten“

$$(2) \quad c_i = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

bezeichnen.

Beweis. [Wir werden im folgenden $s_n[f]$ oder, noch kürzer, s_n statt $\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$ schreiben und werden meistens die selbstverständliche Variable x unterdrücken.]

Wie Herr Haar bereits gezeigt hat³⁾, zerfällt das Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ in $m(n)$ Teilintervalle $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle, \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle, \dots, \langle \alpha_{m-1}, \alpha_m \rangle$, so daß $s_n[f]$ innerhalb eines jeden Teilintervalles konstant ist; genauer ist

$$(3) \quad s_n[f] = \frac{\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(x) dx}{\alpha_{k+1} - \alpha_k}$$

für $\alpha_k < x < \alpha_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$.

¹⁾ Die hier in Frage kommende Eigenschaft habe ich in einer früheren Arbeit, Math. Zeitschr. 26, S. 430, Zeile 1–4 benutzt; hier soll der Beweis nachgetragen werden. Vorliegende Note tritt an Stelle der in der dortigen Korrekturanmerkung ^{*)}, S. 430 angekündigten französischen Publikation.

²⁾ A. Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1909, Kap. III, §§ 1–3.

³⁾ A. Haar, loc. cit. § 2, vorletzter Satz [S. 44].

'Schauder-bázis'. Riesz 'átviteli elvének' alkalmazása. „Übertragungsprinzip“

Satz II. Sei Ω ein zusammenhängendes, beschränktes, ebenes Gebiet vom Lebesgueschen Maß Eins. Es gibt ein in Bezug auf Ω orthogonales, normiertes und vollständiges System $\{\varphi_i(x, y)\}$, welches für die in Ω erklärten, mit der α -ten Potenz ihres Betrages ($\alpha \geq 1$) über Ω doppelt integrierbaren Funktionen $f(x, y)$ dasselbe leistet, wie das Haarsche System für analoge Funktionen einer Variablen in $\langle 0, 1 \rangle$ gemäß Satz I.

Beweis. F. Riesz hat folgendes Übertragungsprinzip formuliert^{*)}: „Ist eine meßbare Menge M von beliebiger Dimension und vom Inhaltsmaße m gegeben, so kann man diese Menge *im wesentlichen eineindeutig* auf eine Strecke von der Länge m derart abbilden, daß jeder meßbaren Teilmenge der einen Menge eine meßbare Teilmenge der anderen Menge, und zwar von gleichem Inhaltsmaße, entspreche. Der Ausdruck „*im wesentlichen eineindeutig*“ ist folgendermaßen zu verstehen: Für jede der beiden Mengen bilden jene Punkte, denen in der andern Menge kein Punkt oder mehr als ein Punkt zugeordnet wird, je eine Nullmenge.“

F. Riesz hat dieses Prinzip ohne Begründung angegeben, man bemerke aber, daß die Peanosche Kurve eine Abbildung des Quadrates auf eine Strecke liefert; diese Abbildung ist von der eben beschriebenen Art. Liegt also ein beschränktes, ebenes Gebiet Ω vom Maße 1 vor, so bildet man zunächst das Ω enthaltende Quadrat im wesentlichen eineindeutig

^{*)} Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. Math. Annalen 69 (1910), § 16.

§ 16.

Übertragung der Resultate auf Funktionen, die auf einer beliebigen meßbaren Menge erklärt sind. Ein Übertragungsprinzip.

Wir hatten in den §§ 4—15 vorausgesetzt, daß die betrachteten Funktionen auf einer Strecke definiert werden. Diese einschränkende Voraussetzung ist keineswegs notwendig. *Unsere Resultate gelten für alle entsprechenden Klassen von Funktionen, die für eine meßbare Menge beliebiger Dimension von nicht verschwindendem Inhaltsmaße erklärt werden; es ist natürlich auch der Begriff des Inhaltsmaßes entsprechend zu deuten.*

In meinen ersten Arbeiten über den hier behandelten Gegenstand hatte ich einen Weg angedeutet, der im Falle $p = 2$ zu dieser Verallgemeinerung der Resultate führt.**) In diesem Falle genügt es nämlich, auf jener Menge ein einziges vollständiges, reell orthogonales Funktionensystem zu erklären und auf dasselbe den in der Einleitung zitierten Satz zu übertragen; das übrige wird dann schon durch die Analysis unendlich vieler Veränderlicher geleistet.**)

*) Vgl. F. Riesz, „Sur les systèmes orthogonaux de fonctions et l'équation de Fredholm“, l. cit.

**) Es handelt sich dabei natürlich zunächst um die Übertragung der entsprechenden Resultate der §§ 6—15. Will man auch die früheren Entwicklungen übertragen,

Riesz 'átviteli elve'. „Übertragungsprinzip“

FRIEDRICH RIESZ in Budapest.

Bei den meisten Resultaten führt nun auch das folgende Übertragungsprinzip zum Ziele, das wir hier nicht weiter begründen: *Ist eine meßbare Menge M von beliebiger Dimension und vom Inhaltsmaße m gegeben, so kann man diese Menge im wesentlichen ein-eindeutig auf eine Strecke von der Länge m derart abbilden, daß jeder meßbaren Teilmenge der einen Menge eine meßbare Teilmenge der anderen Menge, und zwar von gleichem Inhaltsmaße entspreche.* Der Ausdruck „im wesentlichen ein-eindeutig“ ist folgendermaßen zu erklären: Für jede der beiden Mengen bilden jene Punkte, denen in der andern Menge kein Punkt oder mehr als ein Punkt zugeordnet wird, je eine Nullmenge.

so ist der Begriff der Teilstrecke durch Auszeichnung gewisser Teilmengen zu ersetzen. Dieselbe Bemerkung gilt auch für Satz III des § 15 und die nachfolgenden Entwicklungen über Gleichungen vom Volterraschen Typus.

*) Vgl. meine Arbeit: „Sur les suites de fonctions mesurables“, l. cit., wo unter andern die in § 7 der vorliegenden Arbeit entwickelte Ausdehnung des Fischer'schen Satzes durch eine Methode begründet wird, die unmittelbare Übertragung gestattet. Vgl. auch H. Weyl, „Über die Konvergenz von Reihen etc.“, l. cit.

‘Schauder-bázis’. Riesz ‘átviteli elvének’ alkalmazása. „Übertragungsprinzip”

Durch Zusammensetzung beider Abbildungen erhält man eine im wesentlichen eineindeutige, das Lebesguesche Maß erhaltende Abbildung von Ω auf die Strecke $\langle 0, 1 \rangle$.

Vermittels dieser Abbildung liefert nun eine jede Haarsche Funktion $\varphi_i(x)$ eine in Ω definierte Funktion $\varphi_i(x, y)$ von zwei Variablen. $\{\varphi_i(x, y)\}$ ist das gesuchte Orthogonalsystem. Um den Beweis auszuführen, bemerke man, daß die Abbildung den Wert der Integrale nicht ändert. Genauer gesagt, entspricht einer Funktion $f(x, y)$ von zwei Variablen, die ein endliches Doppelintegral

$$\iint_{\Omega} |f(x, y)|^a dx dy = J$$

besitzt, vermöge der Abbildung eine Funktion einer Variablen $f(x)$, die dem Integral

$$\int_0^1 |f(x)|^a dx$$

denselben endlichen Wert J erteilt. Infolgedessen entsprechen sich gegenseitig die Partialsummen vom gleichen Index n der Orthogonalentwicklung von $f(x, y)$ nach $\{\varphi_i(x, y)\}$ und der Orthogonalentwicklung von $f(x)$ nach $\{\varphi_i(x)\}$, so daß die Beziehung (1) ohne weiteres in ihr zweidimensionales Analogon übergeht. Da die Integrale erhalten werden, überträgt sich auch die Normiertheit, Orthogonalität und Vollständigkeit des Haarschen Systems auf das $\{\varphi_i(x, y)\}$ -System.

(Eingegangen am 31. Dezember 1927.)

Haar-wavelet és néhány egyéb wavelet-alkalmazás. Illusztrációk.

Later results summarized by P L Uljanov in 1985.

- [39] R. Pyke, The Haar-function construction of Brownian motion indexed by sets, *Z. für W.* 64 (1983), 523-539.
- [40] J. Radecki, Orthonormal basis in the space $C_1[0,1]$, *Studia Math.* 35 (1970), 123-163.
- [41] J. Rosiński - W. A. Woyczyński, On Ito stochastic integration with respect to the p -stable motion. Preprint No 84-R Dept. of Math. and Statistics Case Western Reserve Univ. March 1984.
- [42] J. Schauder, Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, *Math. Z.* 26 (1927), 47-65.
- [43] F. Schipp, The dual space of martingale VMO space. *Proc. Third Pannonian Symp. Math. Stat.* (Visegrád, 1982), 305-311.
- [44] F. Schipp, VMO spaces not having Schauder basis, *Analysis Math.* 9 (1983), 313-322.
- [45] J. Szulga - W. A. Woyczynski, Existence of double random integral with respect to stable measures, *J. Multivariate Analysis* 13 (1983), 194-201.
- [46] B. Sz. Nagy, Approximation properties of orthogonal expansions, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 15 (1953/54), 31-37.
- [47] H. Triebel, On Haar Bases in Besov Spaces, *SERDICA Bulgaricae Mathematicae Publicationes* 4 (1978), 330-343.
- [48] P. Wojtaszczyk, The Franklin system is an unconditional basis in H_1 , *Arkiv för Math.* 20 (1982), 293-300.

Z. Ciesielski
Mathematical Institute of the
Polish Academy of Sciences
Gdańsk Branch
81-825 Sopot, ul. Abrahama 18
POLAND

COLLOQUIA MATHEMATICA SOCIETATIS JÁNOS BOLYAI
49, ALFRED HAAR MEMORIAL CONFERENCE, BUDAPEST (HUNGARY), 1985.

HAAR SERIES AND RELATED QUESTIONS
P. L. ULJANOV

§ 1. INTRODUCTION

In 1909 A. Haar introduced into mathematics a remarkable system of functions $\chi = \{\chi_m(t)\}_{m=1}^\infty$ which bears his name today. He defined this system first in his dissertation (see [1] and also [2-4]) and the definition runs as follows. For $m = 1$ let $\chi_1(t) \equiv \chi_0^{(0)}(t) \equiv 1$ ($t \in [0,1]$) and for $m \geq 2$, $m = 2^n + k$ ($1 \leq k \leq 2^n$, $n = 0, 1, \dots$) set

$$\chi_m(0) = \chi_m(+0), \quad \chi_m(1) = \chi_m(1-0) \quad \text{and} \quad \chi_m(t) = \frac{\chi_m(t-0) + \chi_m(t+0)}{2}$$

if $t \in (0,1)$, where

$$(1) \quad \chi_m(t) = \chi_n^{(k)}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} & \text{if } t \in \left[\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) \\ -2^{\frac{n}{2}} & \text{if } t \in \left[\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\right) \\ 0 & \text{if } t \in (0,1) - \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right] \end{cases}$$

The first basic results about this system were established by Haar himself. He proved ([1-4]) that χ is a complete orthonormal system (CONS) on $[0,1]$ such that every series

Uljanov P L, Haar series and related questions. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 49., Budapest, Hungary, 1985. Szabados J and Tandori K (editors), *Alfréd Haar Memorial Conference* Vol. II. (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1987) . Pp. 57-96.

Later results summarized by Uljanov in 1985.

$$(2) \quad \sum_{m=1}^{\infty} a_m x_m(t)$$

with Fourier coefficients

$$(3) \quad a_m = a_m(f) = (f, x_m) = \int_0^1 f(t) x_m(t) dt \quad (f \in L(0,1))$$

has the following properties:

- a) if $f \in C[0,1]$, then the series (2) converges uniformly to $f(t)$ on $[0,1]$;
- b) if $f \in L(0,1)$, then (2) converges almost everywhere (a.e.) to $f(t)$ on $[0,1]$.

The Haar system was the first one with such striking properties. According to theorems by Du Bois Reymond (1876) and A. N. Kolmogorov (1922) the trigonometric system T satisfies neither a) nor b) (see [5, p. 132 and 391]).

The Haar system has proved to be the source of several other function systems with certain specific properties (see [11, p. 111]). We mention only a few of them:

- a) Rademacher system (see [20], [7, p. 59] and [8, p. 147])

$$(4) \quad R = \{r_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ with } r_n(t) = 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{2^n} \chi_n^{(k)}(t);$$

- b) Walsh system (see [21], [8, p. 155] and [7, p. 67])

$$(5) \quad W = \{w_n^{(i)}\} \text{ with } w_0^{(0)}(t) = \chi_0^{(0)}(t) \text{ and } w_n^{(i)}(t) = 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{2^n} \varepsilon_{n,i}^{(k)} \chi_n^{(k)}(t)$$

for $1 \leq i \leq 2^n$, where $\varepsilon_{n,i}^{(k)} = \pm 1$ are chosen so that $\{w_n^{(i)}\}$ form an orthonormal system on $[0,1]$.

- c) Faber-Schauder system (see [22], [23] and [11, p. 109]):

$$(6) \quad \phi = \{\phi_m\}_{m=0}^{\infty} \text{ with } \phi_0 \equiv 1 \text{ and } \phi_m(t) = \int_0^t \chi_m(u) du \text{ if } t \in [0,1] \text{ and } m \geq 1.$$

This system was originally given by Faber in 1910 and was rearranged by Schauder in 1927.

- d) The Franklin system $F = \{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ (see [25] and [8, p. 144]) can be obtained from the system ϕ by Schmidt orthogonalization

$$(7) \quad f_m(t) = \sum_{i=0}^m \lambda_{m,i} \phi_i(t) \text{ with } \lambda_{m,m} > 0.$$

The research concerning the Haar and related systems has shown intensified activity in the last 25 years. This can be explained by the facts that such investigations are interesting in themselves and have theoretical and practical applications in other disciplines of mathematics as well. It is especially important that in many problems the Haar system (or some of its relatives) serves the role of a standard. First of all, it satisfies some *sufficiently general properties* which are far not satisfied by every system. On the other hand, and this is even more important, if the *Haar system does not have* a certain property then this property is *not possessed by a general class of systems* (CONS's, bases etc.). All this made it possible to make a deeper and more specific distinction between specific properties of a given *concrete system* and properties characteristic for *whole classes of systems*.

Conventionally four directions of the investigations in this field are distinguished.

- I. The Haar system and series in it;
- II. Systems (and series in them) originating from the Haar system (among others systems (4)-(7));
- III. Application of the results from I and II to the theory of general orthogonal systems as well as to some other questions of the theory of functions.
- IV. Application of the Haar system and its relatives in different branches of mathematics (numerical analysis, coding theory, probability theory, signal theory etc.).

Uljanov P L, Haar series and related questions. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 49., Budapest, Hungary, 1985. Szabados J and Tandori K (editors), *Alfréd Haar Memorial Conference Vol. II.* (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1987) . Pp. 57-96.

Later results summarized by Uljanov in 1985.

In these four directions hundreds of mathematicians are working in different countries (USSR, Hungary, Poland, USA, France etc.). Some information about this, together with corresponding literature, can be found in [5-8], [10-19].

In this paper we only discuss some results from direction I and partly from direction III, mentioning simultaneously some open problems.

§ 2. CONVERGENCE AND DIVERGENCE

1. *Bases.* In § 1 we mentioned that if $f \in C[0,1]$ then (2) uniformly converges to f , i.e. the Haar system (1) is almost a basis in $C[0,1]$. However, for $m \geq 2$ (1) consists of discontinuous functions not belonging to $C[0,1]$. First G. Faber [22] constructed in 1910 a basis for $C[0,1]$ from continuous functions; such a basis is the system ϕ from (6). This result was rediscovered by J. Schauder [23] in 1927 who established a series of similar bases in $C[0,1]$ (see also [8, p. 63]). In 1928, J. Schauder [24] proved that the Haar system is a basis in $L^p(0,1)$ for every $p \in [1, \infty)$.

However, the Faber-Schauder system $\{\phi_m\}$ is not orthogonal and the question about an orthonormal basis in $C[0,1]$ was brought up. Such a basis was constructed in 1928 by Ph. Franklin [25], namely $\{f_m\}$ from (7) (see also [8, p. 144]). After that Z. Ciesielski [27] found a whole class of orthogonal bases in $C[0,1]$.

In 1937, J. Marcinkiewicz verified that the Haar system is an unconditional basis in $L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$. In the proof he used Paley's theorems concerning Walsh series. A short proof for Marcinkiewicz' theorem was found by V. F. Gapoškin [46]. We also mention that on the basis of the system χ , A. M. Oleviskiĭ constructed a special orthonormal basis ψ in $C[0,1]$ and K. S. Kazaryan [122] proved that ψ was not an unconditional basis in $L^p(0,1)$ if $p \in [1,2) \cup (2,\infty)$.

Let $f \in L(0,1)$. We set (see [6, Ch. 3])

$$S^*(f) = S^*(f, t) = \sup_{1 \leq N < \infty} |S_N(t)| = \sup_{1 \leq N < \infty} |S_N(t, f)| = \sup_{1 \leq N < \infty} \left| \sum_{m=1}^N (f, \chi_m) \chi_m(t) \right|,$$

and the Paley function is defined as

$$P(f) = P(f, t) = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (f, \chi_m)^2 \chi_m^2(t) \right\}^{1/2}.$$

By $L^*(0,1)$ we denote the set $\{f: \|S^*(f, t)\|_1 < \infty\}$ which is a subspace in $L(0,1)$ with norm $\|f\|_* = \|S^*(f)\|_1$. In 1970, G. Burkholder and R. Gundy [48] and B. Davis [49] established the existence of two constants $0 < C_1 < C_2$ such that

$$C_1 \|P(f)\|_1 \leq \|S^*(f)\|_1 \leq C_2 \|P(f)\|_1 \quad \text{for every } f \in L(0,1).$$

It follows (see [6, pp. 100-101]) that the Haar system is an unconditional basis in $L^*(0,1)$ and that a Fourier series (2) with Fourier coefficients (3) converges unconditionally if and only if $f \in L^*(0,1)$. We mention that G. Burkholder, R. Gundy and B. Davis proved their results directly for martingales (the sequence of partial sums of an arbitrary Haar series is always a martingale (see e.g. [47-49], [53])). Already in 1966, M. B. Petrovskaya [52] established the following: in order that every function $f \in H_1^{u(\delta)}$ have unconditionally convergent Fourier-Haar series in $L(0,1)$ it is necessary and sufficient that

$$(8) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \omega\left(\frac{1}{m}\right) < \infty.$$

According to our theorem (see [61]), inequality (8) implies that $f \in L \ln L$ provided $f \in H_1^{u(\delta)}$, and this in turn implies $f \in L^*(0,1)$.

* If $1 \leq p \leq \infty$ and $\omega(\delta)$ is a modulus of continuity then we say that $f \in H_p^{u(\delta)}$ iff for the integral modulus of continuity of f we have $\omega_p(\delta, f) = O(\omega(\delta))$. When $p = \infty$ we set $H_{\infty}^{u(\delta)} = H^{\infty}$ and $\omega_p(\delta, f) = \omega(\delta, f)$.

Uljanov P L, Haar series and related questions. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 49., Budapest, Hungary, 1985. Szabados J and Tandori K (editors), *Alfréd Haar Memorial Conference Vol. II.* (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1987) . Pp. 57-96.

Transforms associated to square integrable group representations. I. General results

A. Grossmann, J. Morlet,^{a)} and T. Paul^{b)}

*Centre de Physique Théorique,^{c)} Section II, Centre National de la Recherche Scientifique, Luminy, Case 907,
F-13288 Marseille Cedex 9, France*

(Received 20 December 1984; accepted for publication 12 April 1985)

Let G be a locally compact group, which need not be unimodular. Let $x \rightarrow U(x)$ ($x \in G$) be an irreducible unitary representation of G in a Hilbert space $\mathcal{H}(U)$. Assume that U is square integrable, i.e., that there exists in $\mathcal{H}(U)$ at least one nonzero vector g such that $\int |(U(x)g, g)|^2 dx < \infty$. We give here a reasonably self-contained analysis of the correspondence associating to every vector $f \in \mathcal{H}(U)$ the function $(U(x)g, f)$ on G , discussing its isometry, characterization of the range, inversion, and simplest interpolation properties. This correspondence underlies many properties of generalized coherent states.

1. INTRODUCTION

This paper is the first of a series concerned with applications of various families of "generalized coherent states" to quantum mechanics, wave propagation, and signal analysis.

Many properties of the classical (canonical) coherent states^{1,2} are closely tied to the Weyl-Heisenberg group. In particular, the fundamental formula

$$1 = \int |z\rangle d^2z \langle z| \quad (1.1)$$

is a way of writing the orthogonality relations^{3,4} for the irreducible representation of that group.

Since U is irreducible, the linear span of the vectors $|x\rangle$ is dense in $\mathcal{H}(U)$.

One can then ask the question whether there exists a (suitably normalized) invariant measure $d\mu(x)$ on G , such that

$$\int |x\rangle d\mu(x) \langle x| = 1, \quad (1.3)$$

where $|x\rangle \langle x|$ is defined by $|x\rangle \langle x| f = (U(x)g, f) U(x)g$, and 1 is the identity operator in $\mathcal{H}(U)$.

The answer, in general, is no; this can be seen by taking $G = \mathbb{R}$ (additive), and by considering the one-dimensional

Wavelet description; 'scale' instead of frequency. New method from 1980-. Ingrid Daubechies.

From the Original Frammer to Present-Day Time-Frequency and Time-Scale Frames

Ingrid Daubechies

$$f = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, \psi^{a,b} \rangle \psi^{a,b} \frac{dad b}{a^2}$$

In 1952, the paper "A Class of Nonharmonic Fourier Series" by R.J. Duffin and A.C. Schaeffer was published in the Transactions of the American Mathematical Society. The nonharmonic Fourier series referred to in the title are series of the type

$$\sum_n c_n e^{i\lambda_n x},$$

$$\psi^{(a,b)}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

where the λ_n need not be equally spaced. (That is what makes the series nonharmonic.) The paper

For many years, the role of frames was confined to their use as the tool for studying nonharmonic Fourier series constructed in Duffin and Schaeffer's paper, but a new life was waiting for them. In the early 80's, A. Grossmann, J. Morlet, and T. Paul had given a firm mathematical footing to earlier numerical results by J. Morlet, by showing that any function in $L^2(\mathbb{R})$ can be reconstructed via an integral transform from its wavelet coefficients:

m density 1"), and for square $\in L^2(-\pi, \pi)$; moreover the rier series of g converges. (It

$$f = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, \psi^{a,b} \rangle \psi^{a,b} \frac{dad b}{a^2},$$

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi |\xi|^{-1} |\hat{\psi}(\xi)|^2$$

'Gabor wavelet' (1946). New method from 1980: 'scale instead of frequency'.

IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, VOL. 36, NO. 5, SEPTEMBER 1990

961

The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis

INGRID DAUBECHIES, MEMBER, IEEE

Abstract—Two different procedures are studied by which a frequency analysis of a time-dependent signal can be effected, locally in time. The first procedure is the short-time or windowed Fourier transform, the second is the “wavelet transform,” in which high frequency components are studied with sharper time resolution than low frequency components. The similarities and the differences between these two methods are discussed. For both schemes a detailed study is made of the reconstruction method and its stability, as a function of the chosen time-frequency density. Finally the notion of “time-frequency localization” is made precise, within this framework, by two localization theorems.

tion (see [2], [3]; we shall come back to this in Section II-C-1). The Gabor functions have been used in many different settings in signal analysis, either in discrete lattices (with $\omega_0 \cdot t_0 < 2\pi$ for stable reconstruction) or in the continuous form described next. In many of these applications their usefulness stems from their time-frequency localization properties (see e.g., [4]).

Whatever the choice for g (Gaussian, supported on an interval, etc.), it is interesting to know to which extent the

$$c_{nm}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{im\omega_0 t} g(t - nt_0) f(t)$$

$$\psi^{(a,b)}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Gabor D, Theory of communication. J. Inst. El. Eng. 93 (III), 429-457 (1946).

[Haar A, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Erste Mitteilung). *Mathematische Annalen* 69, 331-371 (1910). [2c] Haar A, Zweite Mitteilung; *ibid.* 71, 38-53 (1911).]

Harmonic Analysis: from Fourier to Haar
Lecture Notes delivered at the Program for Women in
Mathematics
Institute for Advanced Study, Princeton
May 17-28, 2004

María Cristina Pereyra* Lesley Ward †

June 9, 2004

Contents

1 Introduction

2 Crash course on the Fourier transform on the line

- 2.1 From Fourier series to Fourier integrals
- 2.2 Fourier transform in $\mathcal{S}$
 - 2.2.1 Convolutions
 - 2.2.2 Approximations of the identity
 - 2.2.3 Fourier Inversion Formula and Plancherel
 - 2.2.4 Kernels' Interlude
- 2.3 Time/Frequency Dictionary
- 2.4 Beyond $\mathcal{S}$
 - 2.4.1 Tempered distributions and $L^p(\mathbb{R})$
- 2.5 Poisson Summation Formula
- 2.6 Heisenberg's Uncertainty Principle

*Department of Mathematics and Statistics, University of New Mexico, Albuquerque,
<http://www.math.unm.edu/~crisp>, crisp@math.unm.edu.

†Department of Mathematics, Harvey-Mudd College, Claremont, CA
<http://www.math.hmc.edu/~ward>, ward@math.hmc.edu.

**Wavelet description;
'scale' instead of
frequency.**

A Haar-wavelet alkalmazásai (illusztráció 2004-ből).

3 From Fourier to Haar	19
3.1 Windowed Fourier transform	19
3.2 Wavelet transform	21
3.3 Haar Analysis	23
3.3.1 The dyadic intervals	23
3.3.2 Haar Basis	23
3.3.3 The expectation and difference operators	24
3.3.4 Completeness of the Haar system	25
3.4 Haar vs Fourier	29
3.4.1 Unconditional bases	30
4 Zooming properties of wavelets, and applications	33
4.1 Multiresolution Analysis	33
4.1.1 Haar MRA	35
4.2 Filter Banks	39
4.3 Design Features	45
4.4 A catalog of wavelets	46
4.5 Wavelet packets	48
4.6 Wavelets in 2-D	49
4.7 Basics of compression and denoising	51
5 The Hilbert Transform	53
5.1 Some History	54
5.1.1 Connection to complex analysis	54
5.1.2 Connection to Fourier series	55
5.2 Weak (1,1)	57
5.2.1 The distribution function and L^p	59
5.3 Interpolation	60
5.3.1 The Marcinkiewicz Interpolation Theorem	60
5.3.2 L^p boundedness of the Hilbert transform	62
5.3.3 The Riesz-Thorin Interpolation Theorem	62
5.3.4 An Inequalities' Festival	63
6 Haar functions and the Hilbert transform	66
6.1 Haar multipliers and the Hilbert transform	66
7 References	68

Wavelet-transzformációs fraktálanalízis B-Spline-okkal

SCHUSZTER MIKLÓS, DEMCU ANNA, MOJZES IMRE
BME Elektronikai Technológia Tanszék, mojzes@ett.bme.hu

DOBOS LÁSZLÓ¹, NAGY SZILVIA²

¹MTA Műszaki Fizikai és Anyagtudományi Kutatóintézet, dobos@mfa.kfki.hu

²Széchenyi István Egyetem, nagysz@sze.hu

Lektorált

Kulcsszavak: vegyület-felvezetők, fem vékonyrétegek, fraktáldimenzió, wavelet-analízis

A vegyület-felvezető fémkontaktusok felületén hőkezelés közben kialakult mintázatok fraktálmatematikai analízise több új eredményre vezetett, összefüggésekre mutatott rá anyagi jellemzők és a morfológia között. A wavelet-analízis egy speciális transzformációja, mint általánosított lefedés megtartja a kialakult mintázat önhasonlóságát, így annak geometriai analízisére alkalmazható. A kontaktusról készült elektronmikroszkopos felvételen tárolt információ, mint kétfáztozós függvény bonyolultsága információt ad azokról a kémiai változásokról, melyek a kontaktus-ellenállást befolyásolják.

1. Bevezetés

A vegyület-felvezető technológia fontos lépése a hőkezelés. E folyamat során alakulnak át a kontaktusok Schottky-típusúról ohmossá, miközben a kontaktusellenállás és több mechanikai jellemző (mint a hordozóhoz való kötési képesség és adhézió) jelentős változáson megy keresztül [1].

A hőkezelés során a kontaktusként alkalmazott fém vékonyrétegek morfológiája módosul, a kapott szerkezet jellemző lesz a felhasznált anyagokra, a felvitel, illetve hőkezelés körülményeire. A mintázatok egy része önhasonló, fraktál tulajdonságokat mutat [2], melyek analízisére a hagyományos, doboslefedéses módszereken túl egy, a wavelet analízis témakörébe tartozó módszer is alkalmas [3-6].

2. Wavelet-analízis

A nyújtási konstans általában $a=2$ szokott lenni, míg az eltolási állandó $b=1$, eszerint a j -edik felbontási szinten a skálázófüggvények kezdőpontja 2^{-j} rácsállandó-jú rácsot alkot. Minden skálázófüggvény pontosan kifejezhető a nála finomabb felbontási szinteken, így érvényes az alábbi, úgynevezett finomítási egyenlet (refinement equation):

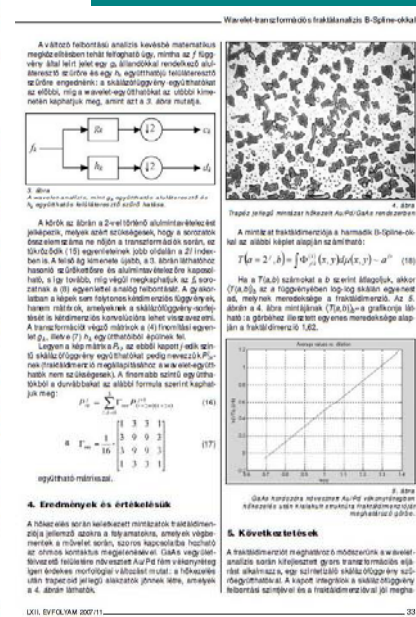
$$\varphi_{j\ell}(x) = \sum_{k=0}^N g_k \varphi_{j+1, k+2\ell}(x). \quad (4)$$

Az egyenletben szereplő g_k együtthatók egyértelműen megadják a bázisrendszer típusát, ebből a néhány számból az egész rendszer felépíthető. A waveletek biztosítják a felbontási szintek közötti átjárást; egy durva felbontási szintű skálázófüggvény-kifejtés és ugyanazon felbontás wavelet-sora megadja az eggyel finomabb felbontású sorfejtés eredményét:

$$f^{[j+1]}(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_{j+1,\ell} \varphi_{j+1,\ell}(x) = \quad (5)$$

A Haar wavelet alkalmazásai. B-spline.

$$h^{(a,b)}(x) = |a|^{-1/2} h\left(\frac{x-b}{a}\right)$$



Schusztér M, Demcu A, Mojzes I, Dobos L, Nagy Sz, Wavelet-transzformációs fraktálanalízis B-Spline-okkal. Híradástechnika LXII évfolyam 2007/11, pp 31-34 (2007).

A Haar wavelet alkalmazásai. 'Változó felbontású analízis'. Multiresolution analysis.

1. Bevezetés

A vegyület-félvezető technológia fontos lépése a hőkezelés. E folyamat során alakulnak át a kontaktusok Schottky-típusú ohmossá, miközben a kontaktusellenállás és több mechanikai jellemző (mint a hordozóhoz való kötési képesség és adhézió) jelentős változáson megy keresztül [1].

A hőkezelés során a kontaktusként alkalmazott fém vékonyrétegek morfológiája módosul, a kapott szerkezet jellemző lesz a felhasznált anyagokra, a felvitel, illetve hőkezelés körülményeire. A mintázatok egy része ön-hasonló, fraktál tulajdonságokat mutat [2], melyek analízisére a hagyományos, dobozfedéses módszereken túl egy, a wavelet analízis témakörébe tartozó módszer is alkalmas [3-6].

2. Wavelet-analízis

A wavelet-analízist, másnéven változó felbontású analízist (multiresolution analysis, MRA) az adatfeldolgozás és -tömörítés számos területén alkalmazzák, szelvésekre, jelek vizsgálatától kezdve képtömörítésen (JPEG2000) át a meteorológiai előrejelzésig számos tudományágban. A változó felbontású analízis során a függvényeket különböző felbontási szinteken vizsgáljuk: az f függvény j -edik szinten történő közelítése a következő [7,8]:

$$f^{[j]}(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_{j\ell} \varphi_{j\ell}(x), \quad (1)$$

ahol a sorfejtés együtthatója előáll, mint

$$c_{j\ell} = \int f(x) \tilde{\varphi}_{j\ell}(x) dx, \quad (2)$$

a φ_j skálázófüggvény (és annak duálisa; $\tilde{\varphi}_j$ is) egyetlen speciális alakú függvénynek a nyújtásával és egy rácson való eltolásával keletkezik:

$$\varphi_{j\ell}(x) = a^{-j/2} \varphi(a^j x - \ell b). \quad (3)$$

A nyújtási konstans általában $a=2$ szokott lenni, az eltolási állandó $b=1$, eszerint a j -edik felbontási szinten a skálázófüggvények kezdőpontja 2^{-j} rácscsillal jár rácsot alkot. Minden skálázófüggvény pontosan ki-
hető a nála finomabb felbontási szinteken, így érvényes az alábbi, úgynevezett finomítási egyenlet (refinement equation):

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=0}^N g_k \varphi_{j+1, k+2^j}(x).$$

Az egyenletben szereplő g_k együtthatók egyértelműen megadják a bázisrendszer típusát, ebből a néhány számból az egész rendszer felépíthető. A waveletek tositják a felbontási szintek közötti átjárást; egy d_j felbontási szintű skálázófüggvény-kifejtés és ugyanezen felbontás wavelet-sora megadja az egyet finomabb felbontású sorfejtés eredményét:

$$f^{[j+1]}(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_{j+1, \ell} \varphi_{j+1, \ell}(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_{j\ell} \varphi_{j\ell}(x) + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} d_{j\ell} \psi_{j\ell}(x),$$

ahol a $d_{j\ell}$ wavelet-együtthatók a skálázófüggvényre hasonlóan

$$d_{j\ell} = \int f(x) \tilde{\psi}_{j\ell}(x) dx,$$

alapján állnak elő. A j -edik szint waveletjei is felírhatók a $j+1$ -edik szint skálázófüggvényeinek lineáris kombinációjaként:

$$\psi_{j\ell}(x) = \sum_{k=0}^N h_k \varphi_{j+1, k+2^j}(x).$$

Az (5) egyenlet utolsó kifejezésében a j -edik skálázófüggvény-kifejtés szétbontható $j-1$ -edik skálázófüggvény- és wavelet-sorra, amelyek közül az előbbi tovább bontható $j-2$ -edik szintbeli összegekre, így tovább. Látható, hogy egy függvény finom, j -edik felbontású közelítése többféleképpen adható meg: részben a j -edik felbontási szint skálázófüggvény-együtthatóival, másrészt bármely durva, $j_0 < j$ felbontási szintű skálázófüggvény-együtthatóival és az összes j_0 és $j-1$ közötti szint wavelet-együtthatóival:

HÍRADÁSTECHNIKA

$$f^{[j]}(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_{j\ell} \varphi_{j\ell}(x) + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} d_{j\ell} \psi_{j\ell}(x). \quad (8)$$

Két-, illetve háromdimenziós függvényeknek is létezik (1)-(hez) illetve (8)-(hoz) hasonló közelítése. A többdimenziós skálázófüggvények előállítását például az egyváltozósok direkt szorzataként, így a függvény j -edik szintű közelítése két dimenzióban például

$$f^{[j]}(x, y) = \sum_{\ell, m \in \mathbb{Z}} c_{j\ell, m} \varphi_{j\ell}(x) \varphi_{jm}(y) = \sum_{\ell, m \in \mathbb{Z}} c_{j\ell, m} \varphi_{j\ell, m}(x, y), \quad (9)$$

ahol az együtthatók a következő, kétváltozós integrállal állnak elő:

$$c_{j\ell, m} = \int \int f(x, y) \tilde{\varphi}_{j\ell}(x) \tilde{\varphi}_{jm}(y) dx dy. \quad (10)$$

Ha a vizsgált f függvény ön-hasonló, azaz fraktál tulajdonságokkal bír, akkor ezt a különböző szintű $d_{j\ell}$ együtthatók skálázó bázisán is nyomon követhetjük: ha a fraktáldimenzio D , akkor az integrálás az xy síkban a Lebesgue-mérték helyett $dy \, dx$ Lebesgue-Stieltjes-mérték szerint történik, amely 2^{Dj} szintű skálázódást jelent. Ennek következtében maguk az együtthatók is 2^{Dj} skálázódást fognak mutatni. A (6) transformáció felfogható úgy, mint általánosított box-feladás: érzékeny az adott mintázat lokális tulajdonságaira, ezért népszerű a fraktálanalízisben. A skálázófüggvény, illetve bizonyos esetekben a wavelet [4], mint egy általánosított ablak végigpásztázza az érdekes területet, numerikusan könnyen kezelhető információt adva annak lokális tulajdonságairól. Érdemes megjegyezni, hogy a mérték skálázódása miatt tetszőleges, a (3) szerint skálázódó függvényeket használva a (2), illetve (10) integrálban $\tilde{\varphi}(x)$ illetve $\tilde{\psi}(x)$ helyett, igaz lesz, hogy $c_j - a^{Dj}$, illetve $d_{j\ell} - a^{Dj}$.

3. Általánosított ablak kiválasztása

A legegyszerűbb skálázófüggvényt Haar Alfréd [9] írta le először [9], két nem nulla együtthatója $a_j = 1/2$. A $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$ Haar-függvény a $[-0.5; 0.5]$ intervallumon 1 értéket vesz fel, egyébként 0. A B-Spline-ok is véges számú, igen egyszerű g_k együtthatóval rendelkeznek. Definíciójukat tekintve a Haar-függvény konvolúciós értelemben vett hatványalakjaként értelmezhetők:

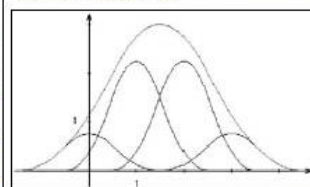
$$\varphi^{(n)}(x) = \varphi^{(n-1)}(x) * \varphi(x). \quad (11)$$

A $\varphi(x)$ önmagával vett konvolúció egyre simább függvények: második hatványa, a háztetőfüggvény folytonos, a harmadik deriválható stb. Az eljárás $n \rightarrow \infty$ határesetben a Gauss-görbét adja, emiatt a Gauss-függvény végtelenül sima természetes ablaknak tekinthető. A módszer a Haar-transzformáció egyszerűségét kombinálja a Gauss-görbe által adott numerikus stabilitással. A B-Spline-ok megtartják az ön-hasonlóságot, a (4) képzési szabály együtthatóit minden esetben a Pascal-háromszög egy-egy sora adja ($2^{-(j-1)/2}$ -nel szorozva).

A harmadik iterált még elég egyszerű, de már kellő numerikus stabilitást biztosít, képzési szabálya (3) és (4) felhasználásával

$$\varphi^{(3)}(x) = \varphi^{(2)}\left(\frac{x}{2}\right) + 3 \cdot \varphi^{(2)}\left(\frac{x-1}{2}\right) + \varphi^{(2)}\left(\frac{x-3}{2}\right). \quad (12)$$

A képzési szabály az 1. ábrán szemléletesen látható: a vastag vonalú görbék összege (a (12) jobb oldala) kiadja a vékony vonalú görbét.



1. ábra A harmadik B-spline képzési szabályának szemléltetése

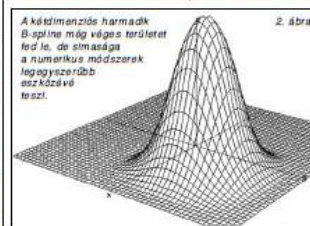
A kétdimenziós esetben az eljárás hasonlóan adható meg:

$$\Phi_{j+1, \ell, m}^{(3)}(x, y) = \sum_{\ell, m \in \mathbb{Z}} G_{\ell, m} \Phi_{j, \ell, m}^{(3)}(x, y), \quad (13)$$

ahol a $G_{\ell, m}$ mátrix a g_k képzési szabály szerint

$$G_{\ell, m} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

A kétdimenziós harmadik B-Spline a 2. ábrán látható.



2. ábra A kétdimenziós harmadik B-spline még véges területen felírható, de simasága a numerikus módszerek legegyszerűbb alkalmazásával teszt.

Diszkrét f_k jelekre a sorfejtési együtthatók (2) és (6) előállítása, avagy a jel analízise egy-egy konvolúciós és alulmintavételezés (downsampling) lesz:

$$c_j = \sum_k f_k g_{j+1-k}, \quad d_j = \sum_k f_k h_{j+1-k}. \quad (15)$$

World Applied Sciences Journal 23 (12): 01-14, 2013

ISSN 1818-4952

© IDOSI Publications, 2013

DOI: 10.5829/idosi.wasj.2013.23.12.423

An Overview of Haar Wavelet Method for Solving Differential and Integral Equations

G. Hariharan and K. Kannan

Department of Mathematics, School of Humanities and Sciences,
SASTRA University, Tamilnadu-613 401, India

Abstract: Investigation of various wavelet methods, for its capability of analyzing various dynamic phenomena through waves gained more and more attention in engineering research. Starting from 'offering good solution to differential equations' to capturing the nonlinearity in the data distribution, wavelets are used as appropriate tools that provide good mathematical model for scientific phenomena, which are usually modeled through linear or nonlinear differential equations. Review shows that the Haar wavelet method (HWM) is efficient and powerful in solving wide class of linear and nonlinear differential equations. The discrete wavelet transform has gained the reputation of being a very effective signal analysis tool for many practical applications. This review intends to provide the great utility of Haar wavelets to science and engineering problems which owes its origin to 1910. Besides future scope and directions involved in developing Haar wavelet algorithm for solving differential equations are addressed.

Key words: Haar wavelet method . differential equations . integral equations . operational matrices . nonlinear PDEs

Hariharan G and Kannan K, An overview of Haar wavelet method for solving differential and intergral equations. World Applied Science Journal 23 (12), 01-14 (2013).

Table 1: Applications of Haar wavelets for differential equations

S. No	Application	Field
1	Estimating depth profile of soil temperature, Modeling of Soil moisture	Civil Engineering
2	Advancement of calculus of variations and optimal control problems, lightning stroke problems, Lumped and distributed parameter systems	Electrical Engineering
3	Analytical and numerical tools and techniques	Mathematical Sciences
4	Image digital and signal processing	Computer Science and Engineering
5	Quantum field theory	Physics
6	Solving Ordinary, Partial, Integral and fractional order differential equations.	Mathematical Sciences
7	Bioengineering, Biomedical applications and Modeling of Biosensors	Biotechnology
8	Vibration problems, Heat and mass transfer problems, Fluid-flow problems	Mechanical Engineering
9	Reaction and Diffusion problems, Chemical kinetics problems	Chemical Engineering

„The Haar wavelet method exhibits several advantageous features.

(i) High accuracy is obtained already for a small number of grid points.

(ii) Possibility of implementation of standard algorithms. For calculation the integrals of the wavelet functions, universal subprograms can be put together. Another time consuming operation is the solving of high-order systems of linear equations and calculating high-order determinants; here the matrix programs of MATLAB are very effective.

(iii) The method is very convenient for solving boundary value problems since the boundary conditions are taken care of automatically. (iv) Singularities can be treated as intermediate boundary conditions; this circumstance to a great extent simplifies the solution.

(v) The obtained solutions are mostly simpler compared with other known methods.”

Hariharan G and Kannan K, An overview of Haar wavelet method for solving differential and integral equations. *World Applied Science Journal* 23 (12), 01-14 (2013).

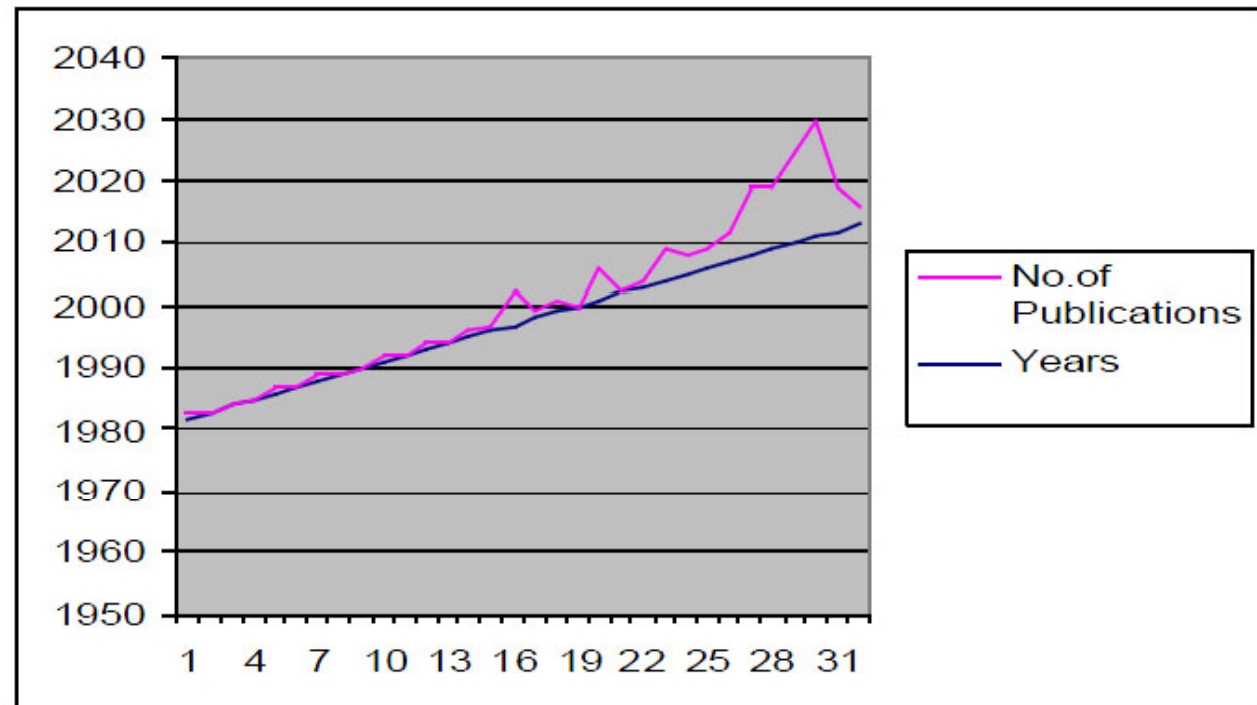


Fig. 1: Comparison between the years and no. of publications (1982-2013)

Pár szó a motivációimról.

A hősugárzás digitális szerkezete.

Optikai Rademacher-rendszer generálása grafénen történő fényszórásnál.

Diszkrét Gábor-wavelet rendszer felhasználása magasrendű felharmonikusok (attoszekundumos impulzusok) frekvencia-idő karakterisztikáihoz.

A Neumann-bázis felhasználása a lézertér és az általa gerjesztett felharmonikusok (attoszekundumos impulzusok) kvantált amplitúdó-síkján vett gerjesztések kifejtésére.

$$\varepsilon_k(x) = 0 \text{ or } 1$$

$$x = 0.01001$$

What is the „digital statistics” of the “dark part” [which is the fractional part of the Boltzmann distribution of thermal energy (Gauss distribution of chaotic amplitudes)].

$$1 - 2\varepsilon_k(x) = r_k(x)$$

$r_k(x)$: Rademacher f.

$$x = 0.10001010101100011010101110111011101100001100110011...$$

$$x = 0.01101110111001111000101010101101000001100111010...$$

$$x = 0.01111110100001011000101010111101110001100110011...$$

$$x = 0.11001110111100000000100010111100001001100101110...$$

$$x = 0.01001110100000011000101010110100000001100100010...$$

$$x = 0.01001110100000011000101010111100000001100100010...$$

$$x = 0.01011110000000010000100010111101100001100100011...$$

$$x = 0.10101110110000011000101010111111000011100100110...$$

$$x = 0.01001110100000011000101010111100000001100100010...$$

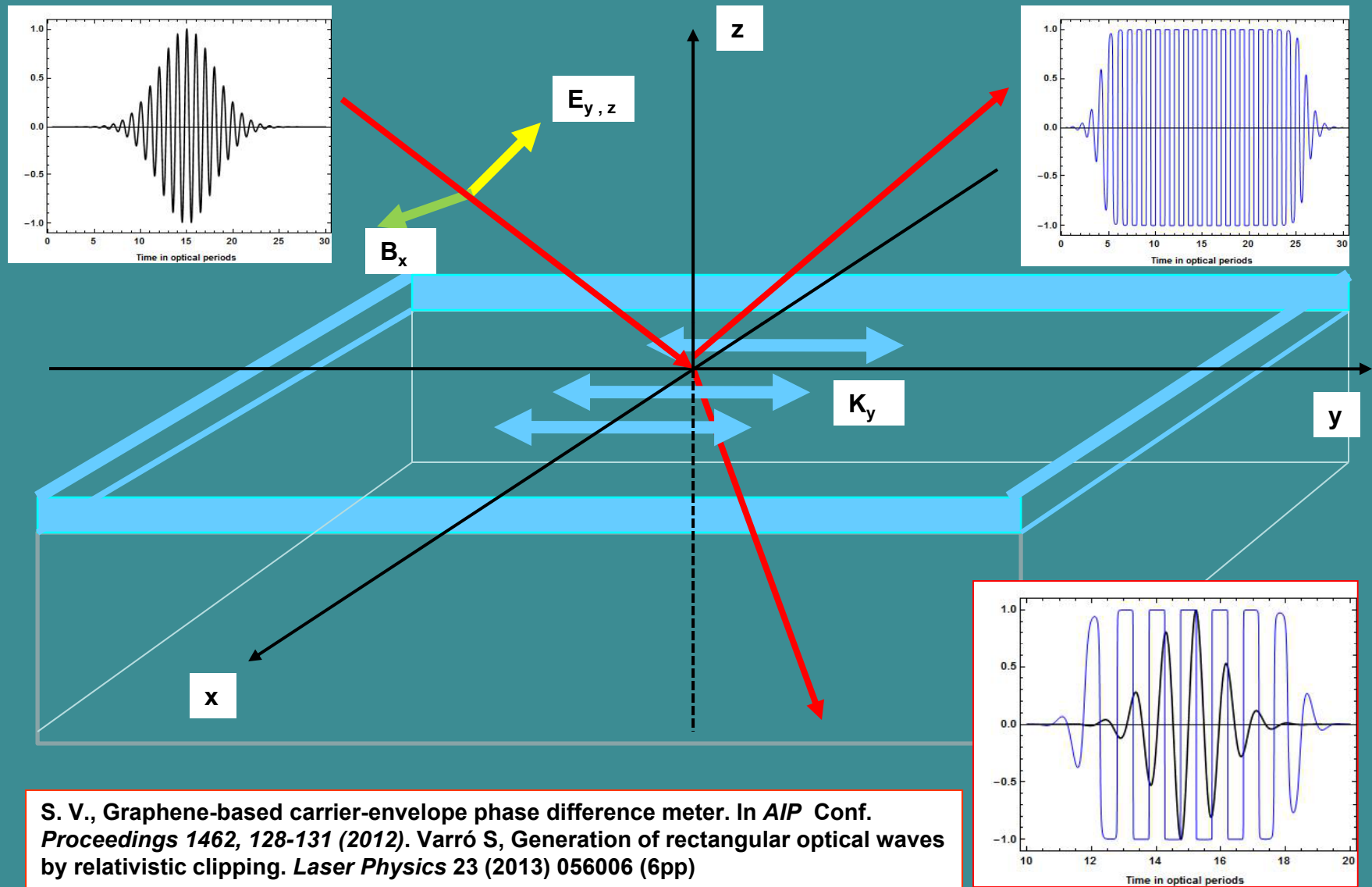
[1] S. V., Einstein's fluctuation formula. A historical overview. *Fluctuation and Noise Letters*, 6 , No.2, R11-R46 (2006).

[2] S. V., A study on black-body radiation: classical and binary photons. *Acta Phys. Hung. B: Quant. El.* 26, 365-389 (2006).

[3] S. V., Irreducible decomposition of Gaussian distributions and the spectrum of black-body rad. *Phys. Script.* 75,160 (2007).

[4] S. V., Varró S, The digital randomness of black-body radiation. *Journal of Physics Conference Series* 414, 012041 (2013).

Scattering of a p-polarized wave on graphene. Generation of an optical Rademacher system.



S. V., Graphene-based carrier-envelope phase difference meter. In *AIP Conf. Proceedings* 1462, 128-131 (2012). Varró S, Generation of rectangular optical waves by relativistic clipping. *Laser Physics* 23 (2013) 056006 (6pp)

Accurate and efficient implementation of the von Neumann representation for laser pulses with discrete and finite spectra

Frank Dimler¹, Susanne Fechner¹, Alexander Rodenberg¹,
Tobias Brixner^{1,3} and David J Tannor^{2,3}

¹ Institut für Physikalische Chemie, Universität Würzburg, Am Hubland, 97074
Würzburg, Germany

² Department of Chemical Physics, Weizmann Institute of Science, 76100
Rehovot, Israel

E-mail: brixner@phys-chemie.uni-wuerzburg.de and
david.tannor@weizmann.ac.il

New Journal of Physics **11** (2009) 105052 (14pp)
Received 27 April 2009

Dimler F, Fechner S, Rodenberg A, Brixner T and Tannor D J, Accurate and efficient implementation of the von Neumann representation for laser pulses with discrete and finite spectra. *New Journal of Physics* 11 (2009) 105052

Abstract. We recently introduced the von Neumann picture, a joint time–frequency representation, for describing ultrashort laser pulses. The method exploits a discrete phase-space lattice of nonorthogonal Gaussians to represent the pulses; an arbitrary pulse shape can be represented on this lattice in a one-to-one manner. Although the representation was originally defined for signals with an infinite continuous spectrum, it can be adapted to signals with discrete and finite spectrum with great computational savings, provided that discretization and truncation effects are handled with care. In this paper, we present three methods that avoid loss of accuracy due to these effects. The approach has immediate application to the representation and manipulation of femtosecond laser pulses produced by a liquid-crystal mask with a discrete and finite number of pixels.

In the final stages of writing this manuscript, we learned that the use of the von Neumann lattice in the time–frequency representation has a long history in signal analysis, tracing back to Gabor in 1946 [26]. It seems that the use of the method was held back by the difficulty in accurately computing the Gabor coefficients (coefficients of the Gaussians on a lattice). In the 1980s, Bastiaans made two seminal contributions. Firstly, he introduced the biorthogonal function for the Gaussian window (this is a linear algebraic formalism that essentially incorporates the inverse overlap matrix into the coefficients of the nonorthogonal basis functions) [27]. Secondly, he showed that the biorthogonal formalism allows a simple formal generalization to window functions other than Gaussians, thereby providing the basis of modern Gabor theory [28]. In the 1990s several studies were performed on the discretization of the Gabor transform and its ancillary functions by periodizing and sampling. The work of Orr [29] puts earlier work on this subject by Auslander *et al* [30, 31] and Wexler and Raz [32], into a single, unified framework. Orr has also derived a sampling theorem, essentially a composite Nyquist rate, for finite discrete Gabor transforms, an issue related to our work on the connection between the truncated von Neumann lattice and the truncated discrete Fourier transform [33].

Gabor D, Theory of communication. J. Inst. El. Eng. 93 (III), 429-457 (1946).

{Haar A, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Erste Mitteilung). *Mathematische Annalen* 69, 331-371 (1910). [2c] Haar A, Zweite Mitteilung; *ibid.* 71, 38-53 (1911).}

Dimler F, Fechner S, Rodenberg A, Brixner T and Tannor D J, Accurate and efficient implementation of the von Neumann representation for laser pulses with discrete and finite spectra. *New Journal of Physics* 11 (2009) 105052

2. von Neumann formalism

Before starting a detailed analysis of the effect of truncation of the von Neumann lattice, we review the basic properties of the von Neumann representation [23].

The von Neumann representation for ultrashort laser pulses corresponds to a mapping of the electric field

$$\varepsilon(\omega) = |\varepsilon(\omega)| \exp[-i\Phi(\omega)] \quad (1)$$

in the frequency domain onto a joint time–frequency domain, the so-called von Neumann plane. The method exploits a discrete lattice of complex Gaussians to represent the pulses; an arbitrary pulse shape is represented in terms of its values at each of the lattice points. The complex Gaussians have the form [25, 34, 35]

$$\tilde{\alpha}_{\omega_n t_m}(\omega) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\alpha(\omega - \omega_n)^2 - it_m(\omega - \omega_n)\right]. \quad (2)$$

Note that these basis functions remain Gaussian when transformed to the time domain. The Gaussians are centered at a set of equally spaced points (ω_n, t_m) in the joint time–frequency

New Journal of Physics 11 (2009) 105052 (<http://www.njp.org/>)

Dimler F, Fechner S, Rodenberg A, Brixner T and Tannor D J, Accurate and efficient implementation of the von Neumann representation for laser pulses with discrete and finite spectra. *New Journal of Physics* 11 (2009) 105052

Gábor lattice for time and frequency and von Neumann lattice for the complex plane of quantum amplitudes.

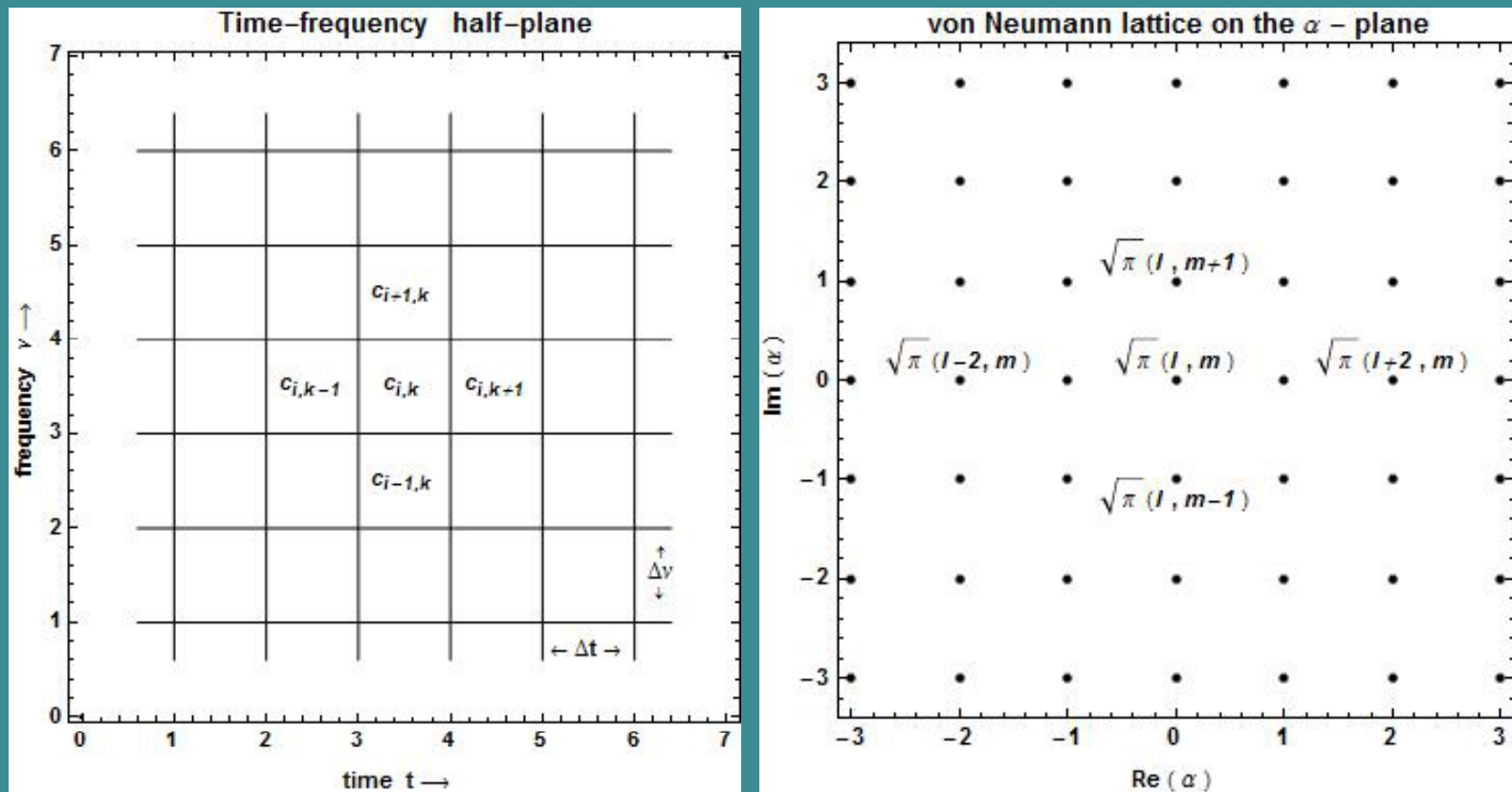
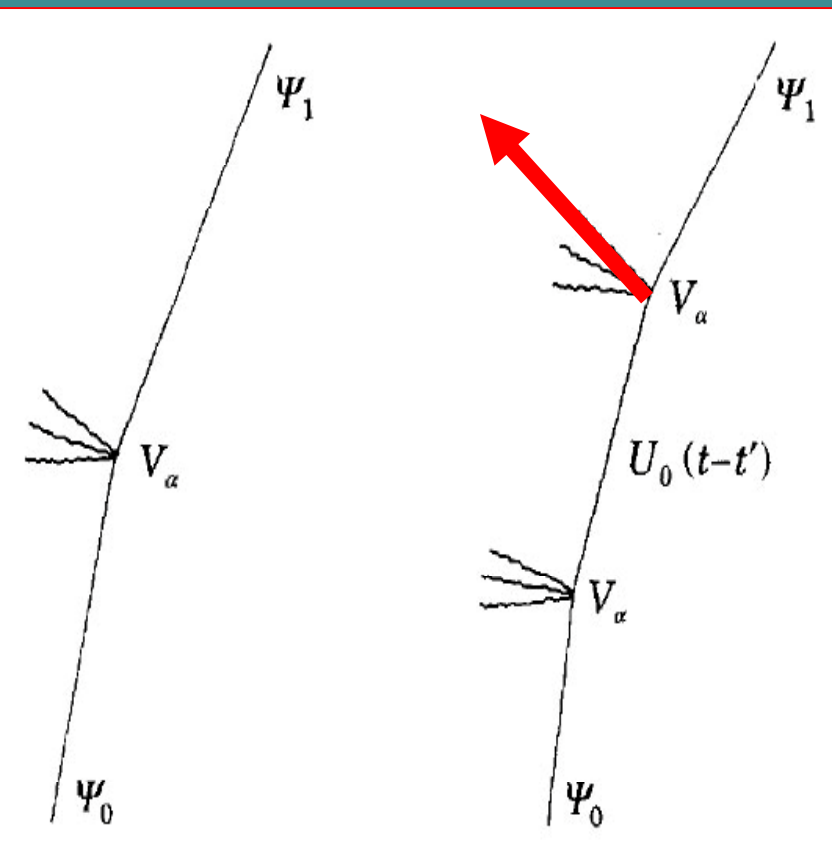
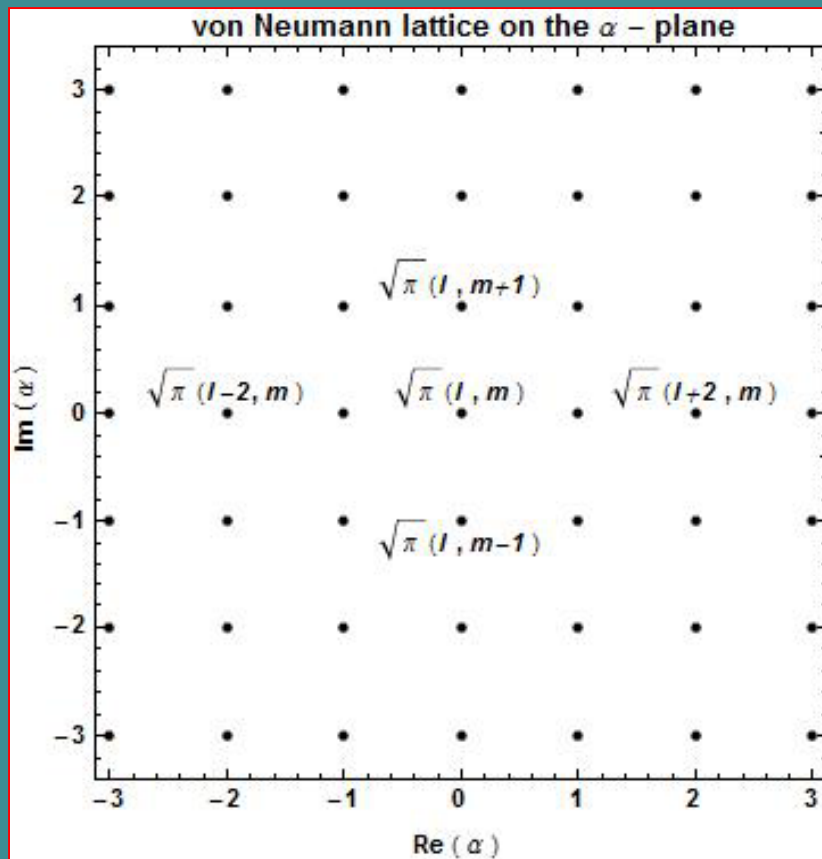


Figure 1. Shows Gábor's diagram (a) on the time–frequency plane, which is divided up into cells of unit area , and an elementary signal is associated with each cells, with coefficients . In Figure 1(b) the points of the von Neumann lattice on the complex plane correspond to the subset of coherent states.

S. V., Quantum treatment of generation of attosecond light pulses on the basis of von Neumann lattice coherent states.
[Invited talk at LPHYS'14 July 2014].

Quantum treatment of electron excitation and HHG on the basis of von Neumann lattice coherent states. Multiphoton Kramers-Heisenberg formula from scattering.



In Figure 1(a) the points of the von Neumann lattice on the complex plane correspond to the subset of coherent states. I and m are integers, the elementary scaled cell size is π . Figure 1(b) illustrates the effect of the 'many-photon potential' at the vertices, and the red arrow represents the outgoing 'large photon', which belongs to the higher-harmonic radiation.

S. V., Quantum treatment of generation of attosecond light pulses on the basis of von Neumann lattice coherent states. [Invited talk at LPHYS'14 July 2014]. Varró S and Ehlötzky F, *Nuovo Cimento D* 15, 1371-1396 (1993)

Az előadás vázlata.

- Haar szerepe a matematikában a XX. század elején. ✓
- Néhány másolat Haar egyetemi előadásjegyzeteiből. ✓
- A Haar – féle ortogonális függvényrendszer. ‘Haar wavelet’. ✓
- Haar-wavelet később. Néhány egyéb wavelet-alkalmazás. Illusztrációk. ✓
- A Haar – féle lemma variációszámításban.
- A Haar – féle invariáns mérték. Integrál.

A két utolsó téma az SZTE Elméleti Fizika Tanszékén 2014. december 18-án lesz tárgyalva:

„Haar Alfréd matematikai fizikája. I-II. Folytatás.”

Köszönetnyilvánítás. Hálásan köszönöm Méreg Zsuzsa és Szabó Emese (Wigner-Könyvtár) és Varga Piroska (Bolyai-Könyvtár), Varga Erika (SZTE, Elméleti Fizikai Intézet) segítségét a szükséges forrásmunkák megtalálásában és megszerzésében. Köszönöm Zomboryné Bazsó Rozáliának, az Országos Evengélikus Levéltár munkatársának a segítségét. A második dián látható másolat eredeti fényképről készült, amelyet Benedict Mihály professzor Úrtól kaptam, köszönet érte.

Acknowledgments.

This work has been supported by the Hungarian Academy of Sciences, by the National Scientific Research Foundation OTKA, Grant No. K 104260, and, partially by the ELI-ALPS project . The ELI-ALPS project (GOP-1.1.1-12/B-2012-0001) is supported by the European Union and co-financed by the European Regional Development Fund.

Függelékek

1. Die Randwertaufgabe der Differentialgleichung . *Göttingen Nachrichten* **1907**, 280-287.
2. Egyszerűen rendezett halmazokról. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, Budapest **27**, 138-151 (1909). On simply-ordered sets. (Alfréd Haar és Dénes König)
3. Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandtrigen Medien. *Göttingen Nachrichten* **1909**, 204-218. (Alfréd Haar und Theodor von Kármán)
4. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (*Inaugural Dissertation* zur Erlangung der Doktorwürde der hohen philosophischen Fakultät der Georg-August-Universität zu Göttingen, vorgelegt von Alfred Haar aus Budapest). **1909**, 1-49.
5. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Erste Mitteilung). *Mathematische Annalen* **69**, 331-371 (1910)
6. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Zweite Mitteilung). *Mathematische Annalen* **71**, 38-53 (1911)
7. Über einfach geordnete Mengen. *Journal für reine und angewandte Mathematik* **139**, 16-28 (1911) (Alfréd Haar und Dénes König)
8. Über die Legendre'sche Reihe. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **32**, 132-142 (1911)
9. Egy ortogonális függvényrendszeréről. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, Budapest **32**, 60-68 (1914).
- 10.a Über analytische Funktionen mit singulärer Linie. *Göttingen Nachrichten* **1914**, 115-123 (1914)
11. A kettős integrálok variációjáról. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, Budapest **35**, 1-19 (1917).
12. Reihenentwicklungen nach Legendre'schen Polynomen. *Mathematische Annalen* **78**, 121-136 (1918)

13. Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen. *Mathematische Annalen* **78**, 294-311 (1918)

14. A lineáris egyenlőtlenségekről. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, Budapest **36**, 279-296 (1918).

15. Über die Variation der Doppelintegrale. *Journal für reine und angewandte Mathematik* **149**, 1-18 (1919)

16.a Über eine Verallgemeinerung de Du Bois-Reymond'schen Lemmas. *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged* **1**, 33-38 (1922) (= Acta Litteratum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco Josephinae, sectio Scientiarum Mathematicarum, Szeged)

17. Über die Konvergenz von Funktionenfolgen. *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged* **1**, 167-179 (1922)

18. Über lineare Ungleichungen. *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged* **2**, 1-14 (1924)

19. Über asymptotische Entwicklungen von Funktionen. *Mathematische Annalen* **96**, 69-107 (1926)

20. Über das Plateausche Problem. *Mathematische Annalen* **97**, 127-158 (1926)

21. Über reguläre Variationsprobleme. *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged* **3**, 224-234 (1927)

22. Sur l'unicité des solutions des equations aux dérivées partielles. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **187**, 23-25 (1928)

23. Zur Charakteristikentheorie. *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged* **4**, 103-114 (1928)

24. Über adjungierte Variationsprobleme und adjungierte Extremalflächen. *Mathematische Annalen* **100**, 481-502 (1928)

25. Über einige Eigenschaften der orthogonalen Funktionensysteme. *Mathematische Zeitschrift* **31**, 128-137 (1929)

26. Über Eindeutigkeit und Analytizität der Lösungen partieller Differentialgleichungen. *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3-10 Settembre 1922*, **3**, 5-10 (1930).

27. Zur Variationsrechnung. Drei Vorträge gehalten am Mathematischen Seminars der Hamburgischen Universität (23-25. Juli 1929). *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminars der Hamburgischen Universität* **8**, 1-27 (1930)

28. Über die Multiplikationstabelle der orthogonale Funktionensysteme. *Mathematische Zeitschrift* **31**, 769-798 (1930)

29. A csoportkarakterisztikák elméletéről. *Matematikai és Fizikai Lapok*, Budapest **38**, 132-145 (1931)

30. A csoportkarakterisztikák elméletéről (Második közlemény). *Matematikai és Fizikai Lapok*, Budapest **39**, 6-16 (1932)

31. Über unendliche kommutative Gruppen. *Mathematische Zeitschrift* **33**, 129-159 (1932)

32. Über die Gruppencharaktere gewisser unedlichen Gruppen. *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged* **5**, 172-186 (1932)

33. A folytonos csoportok elméletéről. *Matematikai és Természettudományi Értesítő*, Budapest **49**, 287-307 (1932).

34. Der Maßbegriff in der Theorie der Kontinuierlichen Gruppen. *Annals of Mathematics* (2) **34**, 147-169 (1933)
(The concept of measure in the theory of continuous groups.)

35. Über die Multiplikationstabelle der unitär-orthogonalen Funktionensysteme. *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa (Science Fisiche e Matematiche)* (2) **2**, 21-40 (1933)

Lineáris egyenlőtlenségek.

[Mechanika, Matematika és Optimalizáláselmélet.]

Lineáris egyenlőtlenségek. Farkas Gyula [1895,...,1901] és Haar Alfréd [1918,...,1924]

A LINEÁRIS EGYENLŐTLENSÉGEKRŐL.

HAAR ALFRÉD-től.

A lineáris egyenlőtlenségek elmélete FARKAS GYULÁ-tól¹ és MINKOWSKI HERMANN-tól² ered. Egymástól függetlenül és különböző utakon jutottak el az elmélet két főtételéhez: a lineáris egyenlőtlenségek alaptételéhez és azok parameteres megoldásához.

A jelen dolgozat első célja ezeket az eredményeket más módon levezetni. A többdimenziós tér geometriájának egyszerű tételei azok, a melyekre a fent említett tételek visszavezethetők, ha a határozatlanokat s ezekkel együtt a közöttük fennálló egyenlőtlenségeket célszerű módon geometriailag interpretáljuk. A kérdéses geometriai tételek a convex testek tulajdonságairól szólnak;³ az erre vonatkozó legegyszerűbb megállapításokon

¹ «A FOURIER-féle mechanikai elv alkalmazásai.» (Mathematikai és Természettudományi Értesítő, XII. k. 1895.) «A FOURIER-féle mechanikai elv alkalmazásának algebrai alapjáról.» (Mathematikai és Fizikai Lapok, V. k. 1896.) «Paraméteres módszer FOURIER mechanikai elvéhez.» (Mathematikai és Fizikai Lapok, VII. k. 1898.) «Theorie der einfachen Ungleichungen.» (Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 124. 1901.)

² «Geometrie der Zahlen.» 39—45. oldal.

Farkas Gy, Theorie der einfache Ungleichungen. *Journal für reine und angew. Math.* 124, 1-27 (1901)

Haar A, A lineáris egyenlőtlenségekről. *Mat. Term. Ért.*, 36, 179-196 (1918); Über lineare Ungleichungen. *Acta Sci. Math.*, 2, 1-14 (1924)

Lineáris egyenlőtlenségek. Haar Alfréd általánosította Farkas Gy és Minkowski H alaptételeit.

280

HAAR ALFRÉD.

kivül egy CARATHÉODORY-tól eredő szép tétel nyer e dolgozatban alkalmazást.¹

Ennek a geometriai módszernek alkalmazásával egyrészt igen egyszerű módon adódnak a régi FARKAS-MINKOWSKI-féle tételek, másrészt ezek a tételek új eredményekkel egészülnek ki.

1. §. A homogen lineáris egyenlőtlenségek alaptétele.

Vizsgálataink kiinduló pontjául az $u_1, u_2, \dots, u_n$ határozatlanok között fennálló homogen lineáris egyenlőtlenségek valamely rendszerét választjuk:

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \dots, u_n) \equiv a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \dots + a_{kn}u_n \geq 0. \quad (k=1, 2, \dots)$$

Rendszerünk véges számú vagy végtelen sok ilyen egyenlőtlenségből áll; az utóbbi esetben azonban feltételezzük, hogy rendszerünk

Farkas Gy, Theorie der einfache Ungleichungen. *Journal für reine und angewandte Math.* 124, (1901)

Haar A, A lineáris egyenlőtlenségekről. *Mat. Term. Ért.*, 36, 179-196 (1918); Über lineare Ungleichungen. *Acta Sci. Math.*, 2, 1-14 (1924)

Lineáris egyenlőtlenségek. Farkas Gyula [1895,...,1901] és Haar Alfréd [1918,...,1924]

Theorie der einfachen Ungleichungen.

(Von Herrn *Julius Farkas* in Kolozsvár (Klausenburg).)

Die naturgemässe und zugleich systematische Behandlung der analytischen Mechanik muss das zuerst von *Fourier**) und dann später von *Gauss***) formulierte Ungleichheitsprincip der virtuellen Verschiebungen zur Grundlage haben.

Die Möglichkeit einer solchen Behandlung erfordert aber gewisse Kenntnisse über die homogenen linearen ganzen Ungleichungen, welche bisher so zu sagen gänzlich gefehlt haben.

Fourier hat sich selbst vielfach um Ungleichungen bemüht***), aber ohne erheblichen Erfolg. Später befasste sich der russische Mathematiker *Ostrogradsky* mit diesem Gegenstande.†) Seine Betrachtungen passen aber nur auf den Fall, dass die Anzahl der Ungleichungen, welche zum Ausdrucke des mechanischen Zwanges dienen, diejenige der Componenten der virtuellen Verschiebungen nicht übertrifft. Andere Publicationen, welche über dieses Thema noch erschienen sind, zeigen auch keinen wesentlichen Fortschritt.

*) „Sur la Statique“. I. de l'Éc. polyt. II. An VI. (1798). Oeuvres, Tome II, pp. 477—521. 1890.

**) „Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik“. Dieses Journal, IV. 1829. Werke V. 1877.

„Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibril“. Comm. soc. reg. scient. Gotting. rec. Vol. VII. 1830. Werke V. 1877.

***) Oeuvres, Tome II. pp. 317—328. 1890. (1823, 1824).

†) „Considérations générales sur les momens des forces“. Mém. de l'Ac. imp. des Sc. de St. Pétersbourg 1834.

Lineáris egyenlőtlenségek. Farkas Gyula [1895,...,1901] és Haar Alfréd [1918,...,1924]

Farkas Gyula élete és munkássága



Szerkesztette Martinás Katalin
Eötvös Loránd Fizikai Társulat
Termodinamikai Szakcsoportja
Budapest

2003

PRÉKOPA ANDRÁS:
FARKAS GYULA ÉLETE ÉS MUNKÁSSÁGÁNAK JELENTŐSÉGE AZ
OPTIMALIZÁLÁS ELMÉLETÉBEN

Kivonat. Százötven évvel ezelőtt született Farkas Gyula a nagy magyar matematikus és elméleti fizikus. Ebben a dolgozatban áttekintjük életútját és a lineáris egyenlőtlenségekkel, illetve a mechanikai rendszerek egyensúlyi állapotának feltételével kapcsolatos munkásságát. Idevágó eredményei a modern optimalizáláselmélet kialakulásában játszottak alapvető szerepet.

ehhez szükséges szakirodalmi bűvárkodás során kezembe kerültek Farkas Gyulának azok a munkái is, amelyekben ő maga felhasználja a lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó alaptételét. Ezek egy része a mechanikai egyensúly szükséges feltételével foglalkozik. Meglepetve láttam, hogy a mechanikai egyensúly feladata, legalábbis akkor, ha az erőternek van potenciálja, lényegében azonos a nemlineáris programozás alapfeladatával. Ilyenformán Farkas Gyula lényegében ugyanarra a célra alkotta meg a lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó tételét, mint amilyen célra azt Kuhn és Tucker felhasználta 1950-ben.

Farkas Gyula tehát egyfelől megalkotta a lineáris egyenlőtlenségek alaptételét (és egyéb idevágó alapvető eredményeket is elért), másfelől megalkotta a nemlineáris programozás legfontosabb tételét, az elméleti fizikai problematika keretein belül. Jóllehet Farkas egy fizikai tételt fogalmazott meg és bizonyított, gondolatmenete érvényes a mechanikától elvonatkoztatott, egyenlőtlen-séges kényszerfeltételek melletti optimalizálásra, vagyis a nemlineáris programozás alapfeladatára.

Lineáris egyenlőtlenségek. A 'Haar lemma' szerepe lineáris rendszerek automataikus kontrolljában, és Markov-láncokhoz viszonyított sztochasztikus összehasonlításban.

KYBERNETIKA — VOLUME 43 (2007), NUMBER 3, PAGES 369 – 391

IDEMPOTENT VERSIONS OF HAAR'S LEMMA: LINKS BETWEEN COMPARISON OF DISCRETE EVENT SYSTEMS WITH DIFFERENT STATE SPACES AND CONTROL

MOURAD AHMANE AND LAURENT TRUFFET

Haar's Lemma (1918) deals with the algebraic characterization of the inclusion of polyhedral sets. This Lemma has been involved many times in automatic control of linear dynamical systems via positive invariance of polyhedrons. More recently, it has been used to characterize stochastic comparison w.r.t. linear/integral ordering of Markov (reward) chains.

Result 1. (Lemma of Haar) Let P (resp. Q) be an $m \times d$ (resp. $m' \times d$) matrix. Let p (resp. q) be a m (resp. m') dimensional column vector. The following assertion

$$\emptyset \neq \{x \in \mathbb{R}^d : Px \leq_m p\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : Qx \leq_{m'} q\},$$

is true if and only if (iff) there exists an $m' \times m$ matrix H which entries are non-negative and such that the following conditions hold:

$$(i) \quad Q = HP, \quad (ii) \quad Hp \leq_{m'} q.$$

In the case where p and q are equal to the null vector (i.e. the homogeneous case), Haar's Lemma reduces to Farkas' lemma [16]. A recent reference for such material is [22, p. 58–61]. Recall that Haar's Lemma has been involved many times in automatic control of linear dynamical systems when the constraint domains (state and/or control) are polyhedrons (see e.g. [21, 29]).

From Haar's Lemma, we deduce our main reference result dealing with the inclusion of polyhedrons included in the non-negative orthant.

Garg A and Mermin N D, Farkas's lemma and the nature of reality: Statistical implications of quantum correlations. Foundations of Physics 14, 1-39 (1984)

Farkas's Lemma and the Nature of Reality: Statistical Implications of Quantum Correlations

Anupam Garg¹ and N. D. Mermin¹

Received December 16, 1982

A general algorithm is given for determining whether or not a given set of pair distributions allows for the construction of all the members of a specified set of higher-order distributions which return the given pair distributions as marginals. This mathematical question underlies studies of quantum correlation experiments such as those of Bell or of Clauser and Horne, or their higher-spin generalizations. The algorithm permits the analysis of rather intricate versions of such problems, in a form readily adaptable to the computer. The general procedure is illustrated by simple derivations of the results of Mermin and Schwarz for the symmetric spin-1 and spin-3/2 Einstein-Podolsky-Rosen problems. It is also used to extend those results to the spin-2 and spin-5/2 cases, providing further evidence that the range of strange quantum theoretic correlations does not diminish with increasing s . The algorithm is also illustrated by giving an alternative derivation of some recent results on the necessity and sufficiency of the Clauser-Horne conditions. The mathematical formulation of the algorithm is given in general terms without specific reference to the quantum theoretic applications.

1. INTRODUCTION

Given N random variables with distributions p_i , $i = 1, \dots, N$, there is always at least one N th order distribution P that returns the given distributions as marginals, namely the uncorrelated product distribution $P = \prod_i p_i$. If, however, we are given not only the first-order distributions but also some of the pair distributions p_{ij} , then the problem of finding any higher-order

(discussion of the Bell, Clauser-Horne inequalities in terms of Farkas's homogeneous inequality lemma)

Section 2 can skip directly to Section 4, after noting the special features of the illustrative distributions described in Section 3.2. Readers interested in the physical significance of the problems solved in Section 4, rather than the method of solution, can limit their attention to Section 4.3, where some implications of the solutions for the transition from quantum to classical behavior are pointed out.

2. FARKAS'S LEMMA AND THE STATISTICAL PROBLEM

2.1. General Formulation of the Problem

Consider N discrete random variables, the i th of which has a domain containing n_i values and a distribution p_i assigning probabilities to each of those values. In addition to the distributions p_i , we are given a set S_2 of pair distributions p_{ij} for some, but not necessarily all, pairs of the variables. Each of the N variables occurs in at least one of the pair distributions in S_2 , so that all of the statistical information is contained in the pair distributions, from which the p_i can be recovered as marginals. For the given pair distributions we wish to know whether it is possible to construct all of a specified set S of third or higher-order distributions, $P_{ijk} \dots$, that meet the following conditions:

(a) *Compatibility.* The two-variable marginals of the higher-order distributions agree with the specified pair distributions in S_2 whenever they can be compared. Thus if p_{ij} is in S_2 and the i th and j th variables are among the variables of $P_{rst\dots}$ in S , then the sum of $P_{rst\dots}$ over all its variables except the i th and j th must be p_{ij} :

$$\sum' P_{rst\dots} = p_{ij} \quad (1)$$

(b) *Consistency.* If any two of the higher-order distributions in S have q of their variables in common, then the q th order distributions obtained by summing each P over its remaining variables must be the same. For example, if P_{ijk} and P_{ijl} are in S , then we require

$$\sum' P_{ijk} = \sum' P_{ijl} \quad (2)$$

where the i th and j th variables are excluded from the sums. Consistency in this case is not in general implied by compatibility, since p_{ij} need not be a member of the set S_2 of specified pair distributions.

(c) *Non-negativity.* None of the higher-order distributions in S can be negative for any values of their arguments.

**Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 49., Budapest, Hungary, 1985.
Szabados J and Tandori K (editors),**

***Alfréd Haar Memorial Conference Vols. I-II.* (North-Holland Publishing Company,
Amsterdam, 1987)**

Tartalomjegyzék

Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 49., Budapest, Hungary, 1985. Szabados J and Tandori K (editors), *Alfréd Haar Memorial Conference* Vols. I-II. (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1987)

COLLOQUIA MATHEMATICA
SOCIETATIS JÁNOS BOLYAI, 49

A. HAAR
MEMORIAL CONFERENCE

Edited by

J. SZABADOS and K. TANDORI

VOL. I.

Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 49.,
Budapest, Hungary, 1985. Szabados J and Tandori
K (editors), *Alfréd Haar Memorial Conference* Vols. I
- II. (North-Holland Publishing Company,
Amsterdam, 1987)



NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY
AMSTERDAM-OXFORD-NEW YORK

MTAK



000000

© BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT

Budapest, Hungary, 1987



ISBN North-Holland: 0 444 70095 1 VOL. I—II.

0 444 87932 3 VOL. I.

ISBN Bolyai: 963 8022 31 0 VOL. I—II.

963 8022 32 9 VOL. I.

ISSN Bolyai: 0 139 3383

Joint edition published by

JÁNOS BOLYAI MATHEMATICAL SOCIETY

and

ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS B. V.

P. O. Box 1991

1000 BZ Amsterdam, The Netherlands

In the USA and Canada:

ELSEVIER SCIENCE PUBLISHING COMPANY INC.

52 Vanderbilt Avenue

New York, N.Y. 10017

USA

Editorial assistant: J. SZABADOS

Printed in Hungary

Szegedi Nyomda

Szeged

CONTENTS

Volume I

Preface	7
Program	9
B. Szökefalvi-Nagy: Alfred Haar (1885-1933): invariant measure of mathematical excellence	17
Z. Ciesielski: Haar orthogonal functions in analysis and probability	25
P. L. Uljanov: Haar series and related questions	57
S. S. Agaian - H. L. Bayadian: Generalized orthogonal Haar systems, synthesis, metric and computing properties	97
M. L. Agranovski: Invariant function spaces and algebras on Lie groups and symmetric domains	115
J. R. Angelos - M. S. Henry - E. H. Kaufman, Jr. - A. Kroö - T. D. Lenker: On the continuity and differentiability of the best approximation operator	127
M. Avdispahić: Concepts of generalized variation on Vilenkin groups and convergence of Vilenkin-Fourier series	145
B. M. Baishanski - S. A. Ali: Strict decrease of the approximation error	165
K. Balázs: On interpolation in the infinite interval	177
G. Baszenski - L. L. Schumaker: Tensor products of abstract smoothing splines	181
G. Björck: Functions of modulus one on $\mathbb{Z}_p$ whose Fourier transforms have constant modulus	193
A. Bogmér - I. Joó - M. Horváth: On the control of strings	199
P. B. Borwein: Quadratic and higher order Padé approximants	213
W. Braun - H. G. Feichtinger: Banach spaces of distributions with double module structure and twisted convolution	225

C. K. Chui - T. X. He - R. H. Wang: Interpolation by bivariate linear splines	247
B. Csikós: On the absence of non-commutative finite dimensional subalgebra of the Poisson algebra of compact symplectic 2-manifolds	257
H. Dappa - W. Treibels: Pointwise multiplication on anisotropic Bessel potential spaces	263
F.-J. Delvos: Convergence of interpolation by translation	273
W. Dickmeis - R. J. Nessel - E. van Wickeren: A nonlinear quantitative resonance principle with applications to pointwise approximation	289
M. Džrbašjan: Interpolation and spectral expansions associated with differential operators of fractional order	303
D. P. Dryanov: Direct and converse theorems for one-sided approximation by entire functions	323
T. Erdélyi: Pointwise estimates for derivatives of polynomials with restricted zeros	329
S. Fridli - P. Simon: A recent survey on some results in the Vilenkin-Fourier analysis	345
R. Gajewski: Estimate of approximation orders of Tchebycheff-Fourier series	359
H. H. Gonska: Simultaneous approximation by algebraic blending functions	363
R. K. Goodrich - K. E. Gustafson: Spectral estimation and factorization in higher dimensions	383
K. E. Gustafson - R. K. Goodrich: Kolmogorov systems and Haar systems	401
B. Gyires: Contributions to the positive definite solutions of certain differential equations	417
M. S. Henry: Lipschitz and strong unicity constants	423
H. Hudzik - A. Kamińska - J. Musielak: On some Banach algebras given by a modular	445
K. G. Ivanov - A. Sharma: Some new results on Walsh theory of equiconvergence	465

Volume II

I. Kluvánek: Stochastic integrals without probability	479
P. E. Koch: Jackson-type theorems for trigonometric polynomials and splines	485

Lj. M. Kocić - I. B. Lacković: Approximation in discrete cones of p -convexity	495
N. P. Korneicuk: Rearrangements and extremal properties of functions	505
S. Koshi: On some properties of measures on LCA groups	515
M. Krbeć: An integral characterization of zero traces in non-reflexive Sobolev type spaces	525
M. Lénárd: On the two-dimensional spline interpolation of Hermite type	531
T. Lyche: Chebyshev systems and error estimates for best approximation	543
G. W. Mackey: The significance of invariant measures	551
N. G. Makarov: Canonical subspaces of almost unitary operators	611
I. Ž. Milovanović: An inequality concerning algebraic polynomials	623
F. Móricz - I. Szalay: Approximation by mixed arithmetic means of double orthogonal series	629
J. Musielak: On generalized Orlicz sequence spaces of Fourier coefficients for Haar and trigonometric systems	641
A. B. Németh: On Alfred Haar's original proof of his theorem on best approximation	651
Nguyen Xuan Ky: On simultaneous approximation by polynomials with weight	661
B. Opic: Some remarks to a compact imbedding of a weighted Sobolev space defined on an unbounded domain	667
N. Ortner: Analytic continuation and convolution of hyper-singular higher Hilbert-Riesz kernels	675
T. Ostrogorski: Weighted norm inequalities for Hardy's operator and some similar operators in $\mathbb{R}^n$	687
J. Pál: The almost everywhere differentiability of Wagner's dyadic integral function on $\mathbb{R}^+$	695
W. Pawłucki - W. Pleśniak: Markov's inequality and C^∞ -functions on subanalytic sets	703
J. Peetre: Some unsolved problems	711
F. Peherstorfer: On Tchebycheff polynomials on disjoint intervals	737

J. Prestin: Best approximation in Lipschitz spaces	753
J. B. Prolla - A. O. Chiacchio: Existence of continuous metric selections	761
F. Schipp: Haar and Walsh series and martingales	775
R. Schott: Haar measures and random walks on Lie groups and homogeneous spaces	787
H. Schwinn: On the rate of approximation by strong arithmetic means of orthogonal series	799
A. Seeger: A note on absolute Riesz summability of Fourier integrals	813
P. Sjölin: Regularity properties of spherical means	823
G. Sonnevend: A class of sequential algorithms for spectral approximation with rational and with Haar functions	847
W. Splettstößer - W. Ziegler: The generalized Haar functions, the Haar transform on $\mathbb{R}^n$, and the Haar sampling theorem	873
R. S. Stanković - M. R. Stojić: A note on the discrete Haar derivative	897
H. Strauss: One-sided L_1 -approximation of continuous functions and comparison theorems for monosplines	909
G. J. Székely: Haar measure on semigroups	917
B. Uhrin: Some remarks about the lattice points in difference sets	929
A. K. Varma - P. Vértesi: Lagrange and $(0, M)$ interpolation based on the roots of unity	939
I. Vincze: An extreme value problem on permutations	945
S. K. Vodopjanov: Existence conditions for the extendability of differentiable functions and bounds for the norm of the extension operator	957
W. R. Wade: A growth estimate for Cesàro partial sums of multiple Walsh-Fourier series	975
Xie Ting-fan: On the approximation by Fourier sums	993
D. Zwick: Best n -convex approximation: a sufficient condition	1003
List of participants	1011

PREFACE

On the centenary of the birth of one of the greatest Hungarian mathematicians Alfred Haar, the János Bolyai Mathematical Society and the Hungarian Academy of Sciences organized an "Alfred Haar Memorial Conference" on August 11-17, 1985 in Budapest. 152 mathematicians (among them 117 foreign participants) took part in the conference, delivering 127 lectures.

The subjects of the lectures were mostly those areas of mathematics in which Alfred Haar created outstanding and fundamental results, such as approximation theory, orthogonal series (in particular Haar series), Haar measure and its applications.

This volume contains 75 lectures presented at the conference, 48 of them being original works not published elsewhere. The papers are in alphabetic order according to their author's names, except three principal lectures arranged as they were delivered at the conference.

The Editors

The „digital statistics” of the “dark part” [which is the fractional part of the Boltzmann distribution of thermal energy (Gauss distribution of chaotic amplitudes)].

Let us write down x ($0 < x < 1$) as a sum of (negative) powers of 2; this is the diadic (binary) representation.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{2^k}$$

$$\varepsilon_k(x) = 0 \text{ or } 1$$

$$e.g. \quad x = 0.010011101\dots$$

$$1 - 2\varepsilon_k(x) = r_k(x)$$

The functions $r_k(x)$ are the Rademacher functions

If the quantity x is a random variable, then the associated $\varepsilon_k(x)$ – s are also random variables, which, of course, depend on x . Let $f_a(x)$ be the probability density function of x , on the interval (0, 1). What form $f_a(x)$ may (must) have, if $\varepsilon_k(x)$ – s are independent from each other? Or, what distribution x has, if in its dyadic expansion the 0-s and 1-s vary completely independent „during an experimental run” ?

Answer to the question on the 'digital statistics' of the dark part [the fractional part of energy with Boltzmann distribution]

Let us expand x ($0 < x < 1$) in the sum of (negative) powers of 2. This is the dyadic expansion.

Question: If x is a random variable, then the associated $\varepsilon_k(x)$ -s are also random variables, depending on x , of course. Let $f_a(x)$ is the density function of x on $(0, 1)$. For what $f_a(x)$ are the $\varepsilon_k(x)$ -s independent on each other? What is the distribution of x , if in its dyadic expansion the 0-s and 1-s at different positions vary independently in an 'experimental run'?

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{2^k}$$

$$\varepsilon_k(x) = 0 \text{ or } 1$$

$$\text{e.g. } x = 0.01011101001\dots$$

$$b_k = e^{-h\nu/2^k kT}$$

$$p_0 = P(\varepsilon_k(x) = 0) = 1/(1 + b_k)$$

$$p_1 = P(\varepsilon_k(x) = 1) = b_k/(1 + b_k)$$

$$f_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } a = 0 \\ \frac{ae^{ax}}{e^a - 1}, & \text{if } a \neq 0 \end{cases}$$

$$f(y) = \frac{\beta \cdot e^{-\beta \cdot y}}{1 - e^{-\beta}} \quad (0 \leq y \leq 1)$$

Answer. Either: The distribution of x is either exponential, and exactly coincides with that of the dark part, obtained earlier as the fractional part of the Gauss variable at some T [1,2, 3].

Or: The distribution of x is uniform. Its expectation value is $1/2$, the zero point energy. In this case the $\varepsilon_k(x)$ -s are not only independent, but have the same distribution!

[New question. To what agent the zero point energy belongs?]

$$\varepsilon_k(x) = 0 \text{ or } 1$$

$$x = 0.01001$$

What is the „digital statistics” of the “dark part” [which is the fractional part of the Boltzmann distribution of thermal energy (Gauss distribution of chaotic amplitudes)].

$$1 - 2\varepsilon_k(x) = r_k(x)$$

$r_k(x)$: Rademacher f.

$$x = 0.10001010101100011010101110111011101100001100110011...$$

$$x = 0.01101110111001111000101010101101000001100111010...$$

$$x = 0.01111110100001011000101010111101110001100110011...$$

$$x = 0.11001110111100000000100010111100001001100101110...$$

$$x = 0.01001110100000011000101010110100000001100100010...$$

$$x = 0.01001110100000011000101010111100000001100100010...$$

$$x = 0.01011110000000010000100010111101100001100100011...$$

$$x = 0.10101110110000011000101010111111000011100100110...$$

$$x = 0.01001110100000011000101010111100000001100100010...$$

[1] S. V., Einstein's fluctuation formula. A historical overview. *Fluctuation and Noise Letters*, 6 , No.2, R11-R46 (2006).

[2] S. V., A study on black-body radiation: classical and binary photons. *Acta Phys. Hung. B: Quant. El.* 26, 365-389 (2006).

[3] S. V., Irreducible decomposition of Gaussian distributions and the spectrum of black-body rad. *Phys. Script.* 75,160 (2007).

[4] S. V., Varró S, The digital randomness of black-body radiation. *Journal of Physics Conference Series* 414, 012041 (2013).