Wigner tétele kvantummechanikai szimmetriákról

Gehér György Pál

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet
és
MTA-DE "Lendület" Funkcionálanalízis Kutatócsoport,
Debreceni Egyetem

2014. Október 30.

Elméleti Fizika Szeminárium

A tétel története

Wigner tétele

Tétel

Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert tér és jelölje $\mathcal{S}$ az egységvektorok halmazát. Legyen $\phi\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ olyan (nem feltétlen bijektív!) transzformáció, melyre a következő teljesül:

$$|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle| = |\langle \phi(\vec{u}), \phi(\vec{v})\rangle| \quad (\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1). \tag{WF}$$

Wigner tétele

Tétel

Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert tér és jelölje $\mathcal{S}$ az egységvektorok halmazát. Legyen $\phi\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ olyan (nem feltétlen bijektív!) transzformáció, melyre a következő teljesül:

$$|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle| = |\langle \phi(\vec{u}), \phi(\vec{v})\rangle| \quad (\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1). \tag{WF}$$

Ekkor létezik egy olyan lineáris vagy antilineáris izometria $\mathbf{W}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ és egy függvény $\tau\colon \mathcal{S} \to \mathbb{T}$, hogy

$$\phi(\vec{u}) = \tau(\vec{u}) \cdot \mathbf{W}\vec{u} \qquad (\vec{u} \in \mathcal{H}).$$

Wigner bizonyítása nem volt matematikailag korrekt (1931).

Wigner bizonyítása nem volt matematikailag korrekt (1931).

Az első matematikailag teljes bizonyítások:

J. A. Lomont és P. Mendleson (1963). $\longrightarrow$ Bijektívre

Wigner bizonyítása nem volt matematikailag korrekt (1931).

Az első matematikailag teljes bizonyítások:

J. A. Lomont és P. Mendleson (1963). $\longrightarrow$ Bijektívre

V. Bargmann (1964). $\longrightarrow$ Bijektívre

Figure: Valentine Bargmann

U. Uhlhorn (1963)-ban $\longrightarrow$ Általánosítás (projektív geometria alaptétele), bijektívre!

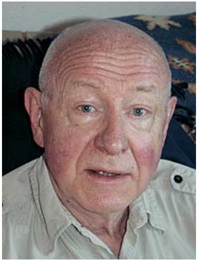

Figure: Ulf Uhlhorn

U. Uhlhorn (1963)-ban $\longrightarrow$ Általánosítás (projektív geometria alaptétele), bijektívre!

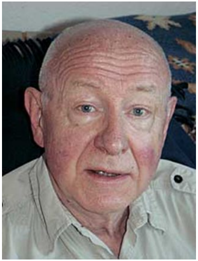

Figure: Ulf Uhlhorn

Ám ezek hosszú és nem könnyen átlátható bizonyítások.

Az első matematikailag kristálytiszta bizonyítás

Molnár Lajos (1996) $\longrightarrow$ algebrai megközelítés. De nem elemi!

Figure: Molnár Lajos

Győry M. (2004) $\longrightarrow$ Zorn lemmás megközelítés.

Figure: Győry Máté

R. Simon et al. (2008) $\longrightarrow$ Csak a szeparábilis eset.

R. Simon et al. (2008) $\longrightarrow$ Csak a szeparábilis eset.

A. Mouchet (2013) $\longrightarrow$ Felteszi, hogy ϕ kétszer deriválható, és hogy a tér szeparábilis.

Wigner tétel átfogalmazása

Ha $\|\vec{u}\| = 1$, akkor jelölje $\mathbf{P}[\vec{u}]$ azt az egy-rangú (önadjungált) projekciót, melynek képtere pontosan $\mathbb{C} \cdot \vec{u}$.

Wigner tétel átfogalmazása

Ha $\|\vec{u}\| = 1$, akkor jelölje $\mathbf{P}[\vec{u}]$ azt az egy-rangú (önadjungált) projekciót, melynek képtere pontosan $\mathbb{C} \cdot \vec{u}$.
Legyen $\mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ az egy-rangú projekciók halmaza.

Wigner tétel átfogalmazása

Ha $\|\vec{u}\| = 1$, akkor jelölje $\mathbf{P}[\vec{u}]$ azt az egy-rangú (önadjungált) projekciót, melynek képtere pontosan $\mathbb{C} \cdot \vec{u}$.
Legyen $\mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ az egy-rangú projekciók halmaza. Ekkor

$$\underbrace{d_g(\mathbf{P}[\vec{u}], \mathbf{P}[\vec{v}])}_{\text{gap metrika}} = \|\mathbf{P}[\vec{u}] - \mathbf{P}[\vec{v}]\| =$$

Wigner tétel átfogalmazása

Ha $\|\vec{u}\| = 1$, akkor jelölje $\mathbf{P}[\vec{u}]$ azt az egy-rangú (önadjungált) projekciót, melynek képtere pontosan $\mathbb{C} \cdot \vec{u}$.
Legyen $\mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ az egy-rangú projekciók halmaza. Ekkor

$$\underbrace{d_g(\mathbf{P}[\vec{u}], \mathbf{P}[\vec{v}])}_{\text{gap metrika}} = \|\mathbf{P}[\vec{u}] - \mathbf{P}[\vec{v}]\| = \sqrt{1 - |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|^2} =$$

Wigner tétel átfogalmazása

Ha $\|\vec{u}\| = 1$, akkor jelölje $\mathbf{P}[\vec{u}]$ azt az egy-rangú (önadjungált) projekciót, melynek képtere pontosan $\mathbb{C} \cdot \vec{u}$.
Legyen $\mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ az egy-rangú projekciók halmaza. Ekkor

$$\underbrace{d_g(\mathbf{P}[\vec{u}], \mathbf{P}[\vec{v}])}_{\text{gap metrika}} = \|\mathbf{P}[\vec{u}] - \mathbf{P}[\vec{v}]\| = \sqrt{1 - |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|^2} = \sqrt{1 - Tr(P[\vec{u}]P[\vec{v}]}.$$

Wigner tétel átfogalmazása

Ha $\|\vec{u}\| = 1$, akkor jelölje $\mathbf{P}[\vec{u}]$ azt az egy-rangú (önadjungált) projekciót, melynek képtere pontosan $\mathbb{C} \cdot \vec{u}$.
Legyen $\mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ az egy-rangú projekciók halmaza. Ekkor

$$\underbrace{d_g(\mathbf{P}[\vec{u}], \mathbf{P}[\vec{v}])}_{\text{gap metrika}} = \|\mathbf{P}[\vec{u}] - \mathbf{P}[\vec{v}]\| = \sqrt{1 - |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|^2} = \sqrt{1 - Tr(P[\vec{u}]P[\vec{v}]}.$$

Tétel

Tekintsünk egy $\phi\colon \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$ izometriát. Ekkor létezik egy $\mathbf{W}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineáris vagy antilineáris izometria, mellyel a következő teljesül:

$$\phi(\mathbf{P}[\vec{u}]) = \mathbf{W}\mathbf{P}[\vec{u}]\mathbf{W}^* = \mathbf{P}[\mathbf{W}\vec{u}] \quad (\|\vec{u}\| = 1).$$

Metrikus rezolvens halmazok (ami inspirálta a bizonyítást)

Legyen $\dim \mathcal{H} = N \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$, $N > 1$.
Fixálunk egy ONB-t: $\{\vec{e_j}\}_{j=1}^N$.
Legyen $v_j := \langle \vec{v}, \vec{e_j} \rangle$ a $\vec{v}$ vektor j-edik koordinátája.

Legyen $\dim \mathcal{H} = N \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$, $N > 1$.
Fixálunk egy ONB-t: $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^N$.
Legyen $v_j := \langle \vec{v}, \vec{e}_j \rangle$ a $\vec{v}$ vektor j-edik koordinátája.

Definíció

Legyen (X, d) egy metrikus tér és $D, R \subseteq X$. Azt monduk, hogy az R rezolválja D-t, ha bármely két $x_1, x_2 \in D$ pont esetén, ha $d(x_1, y) = d(x_2, y)$ teljesül minden $y \in R$ pontra, akkor szükségképpen $x_1 = x_2$.

A

$$D := \{\mathbf{P}[\vec{v}]\colon v_j \neq 0,\ \forall\, j\} \subseteq \mathcal{P}_1$$

halmaz sűrű $\mathcal{P}_1$-ben.

A

$$D := \{\mathbf{P}[\vec{v}] \colon v_j \neq 0,\ \forall\, j\} \subseteq \mathcal{P}_1$$

halmaz sűrű $\mathcal{P}_1$-ben.

Lemma

Legyen $\mathcal{H}$ egy szeparábilis Hilbert tér (véges vagy végtelen dimenziós). Ekkor a

$$R = \{\mathbf{P}[\vec{e}_j]\}_{j=1}^{N} \cup \left\{\mathbf{P}[\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_j - \vec{e}_{j+1})], \mathbf{P}[\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_j + i\vec{e}_{j+1})]\right\}_{1 \leq j < N}$$

halmaz rezolválja D-t.

A

$$D := \{\mathbf{P}[\vec{v}]\colon v_j \neq 0,\ \forall\, j\} \subseteq \mathcal{P}_1$$

halmaz sűrű $\mathcal{P}_1$-ben.

Lemma

Legyen $\mathcal{H}$ egy szeparábilis Hilbert tér (véges vagy végtelen dimenziós). Ekkor a

$$R = \{\mathbf{P}[\vec{e}_j]\}_{j=1}^{N} \cup \left\{\mathbf{P}[\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_j - \vec{e}_{j+1})], \mathbf{P}[\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_j + i\vec{e}_{j+1})]\right\}_{1\leq j<N}$$

halmaz rezolválja D-t.

Bizonyítás. $\ldots\square$

A Wigner tétel bizonyítása a szeparábilis esetben

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{P}[\vec{f_j}] = \phi(\mathbf{P}[\vec{e_j}])$, ekkor $\{\vec{f_j}\}_{j=1}^N$ ONR.

$$\mathcal{H}' := \vee\{\vec{f_j}\}_{j=1}^N.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{P}[\vec{f}_j] = \phi(\mathbf{P}[\vec{e}_j])$, ekkor $\{\vec{f}_j\}_{j=1}^N$ ONR.

$$\mathcal{H}' := \vee\{\vec{f}_j\}_{j=1}^N.$$

Ha $\vec{v} \in \mathcal{S}$ és $\phi(\mathbf{P}[\vec{v}]) = \mathbf{P}[\vec{w}]$, akkor (WF)-ből

$$|v_j| = |\langle \vec{w}, \vec{f}_j \rangle| \quad (\forall j)$$

adódik és a Parseval azonosság adja, hogy $\vec{w} \in \mathcal{H}'$.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{P}[\vec{f_j}] = \phi(\mathbf{P}[\vec{e_j}])$, ekkor $\{\vec{f_j}\}_{j=1}^N$ ONR.

$$\mathcal{H}' := \vee\{\vec{f_j}\}_{j=1}^N.$$

Ha $\vec{v} \in \mathcal{S}$ és $\phi(\mathbf{P}[\vec{v}]) = \mathbf{P}[\vec{w}]$, akkor (WF)-ből

$$|v_j| = |\langle \vec{w}, \vec{f_j} \rangle| \quad (\forall j)$$

adódik és a Parseval azonosság adja, hogy $\vec{w} \in \mathcal{H}'$.
Ezért ha definiáljuk az alábbi lineáris izometriát:

$$\mathbf{V}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad \mathbf{V}\vec{e_j} = \vec{f_j} \quad (j \in \mathbb{N}_N),$$

és a

$$\phi_1(\cdot) = \mathbf{V}^*\phi(\cdot)\mathbf{V}$$

leképezést könnyen látható, hogy a $\phi_1(\cdot)$ is teljesíti (WF)-t.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{P}[\vec{f_j}] = \phi(\mathbf{P}[\vec{e_j}])$, ekkor $\{\vec{f_j}\}_{j=1}^N$ ONR.

$$\mathcal{H}' := \vee\{\vec{f_j}\}_{j=1}^N.$$

Ha $\vec{v} \in \mathcal{S}$ és $\phi(\mathbf{P}[\vec{v}]) = \mathbf{P}[\vec{w}]$, akkor (WF)-ből

$$|v_j| = |\langle \vec{w}, \vec{f_j} \rangle| \quad (\forall j)$$

adódik és a Parseval azonosság adja, hogy $\vec{w} \in \mathcal{H}'$.
Ezért ha definiáljuk az alábbi lineáris izometriát:

$$\mathbf{V} \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad \mathbf{V}\vec{e_j} = \vec{f_j} \quad (j \in \mathbb{N}_N),$$

és a

$$\phi_1(\cdot) = \mathbf{V}^* \phi(\cdot) \mathbf{V}$$

leképezést könnyen látható, hogy a $\phi_1(\cdot)$ is teljesíti (WF)-t. Sőt

$$\phi_1(\mathbf{P}[\vec{e_j}]) = \mathbf{V}^* \mathbf{P}[\vec{f_j}] \mathbf{V} = \mathbf{P}[\mathbf{V}^* \vec{f_j}] = \mathbf{P}[\vec{e_j}] \quad (j \in \mathbb{N}_N).$$

Újra (WF)-miatt

$$\phi_1\big(\mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e}_j - \vec{e}_{j+1})]\big) = \mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e}_j - \delta_{j+1}\vec{e}_{j+1})]$$

$$\phi_1\big(\mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e}_j + i\vec{e}_{j+1})]\big) = \mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e}_j - \varepsilon_{j+1}\vec{e}_{j+1})]$$

ahol $|\delta_{j+1}| = |\varepsilon_{j+1}| = 1$ $(1 \leq j < N)$.

Újra (WF)-miatt

$$\phi_1\big(\mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e}_j - \vec{e}_{j+1})]\big) = \mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e}_j - \delta_{j+1}\vec{e}_{j+1})]$$

$$\phi_1\big(\mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e}_j + i\vec{e}_{j+1})]\big) = \mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e}_j - \varepsilon_{j+1}\vec{e}_{j+1})]$$

ahol $|\delta_{j+1}| = |\varepsilon_{j+1}| = 1$ $(1 \leq j < N)$. Ezért

$$\sqrt{2} = |1 + \delta_{j+1}\overline{\varepsilon_{j+1}}|,$$

melyből $\delta_{j+1} = \pm i\varepsilon_{j+1}$ $(j < \mathbb{N})$ adódik a koszínusz tétel segítségével.

Újra (WF)-miatt

$$\phi_1\big(\mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e_j}-\vec{e}_{j+1})]\big)=\mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e_j}-\delta_{j+1}\vec{e}_{j+1})]$$

$$\phi_1\big(\mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e_j}+i\vec{e}_{j+1})]\big)=\mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e_j}-\varepsilon_{j+1}\vec{e}_{j+1})]$$

ahol $|\delta_{j+1}|=|\varepsilon_{j+1}|=1$ $(1\leq j<N)$. Ezért

$$\sqrt{2}=|1+\delta_{j+1}\overline{\varepsilon_{j+1}}|,$$

melyből $\delta_{j+1}=\pm i\varepsilon_{j+1}$ $(j<\mathbb{N})$ adódik a koszínusz tétel segítségével.

1. Ha $\varepsilon_2=-i\delta_2$, akkor $\mathbf{U}$ legyen az az unitér operátor, melyre

$$\mathbf{U}\vec{e_1}=\vec{e_1},\quad \mathbf{U}\vec{e_k}=\left(\prod_{j=2}^{k}\delta_j\right)\vec{e_k}\quad (k>1).$$

Újra (WF)-miatt

$$\phi_1\big(\mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e}_j-\vec{e}_{j+1})]\big)=\mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e}_j-\delta_{j+1}\vec{e}_{j+1})]$$

$$\phi_1\big(\mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e}_j+i\vec{e}_{j+1})]\big)=\mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e}_j-\varepsilon_{j+1}\vec{e}_{j+1})]$$

ahol $|\delta_{j+1}|=|\varepsilon_{j+1}|=1$ $(1\leq j<N)$. Ezért

$$\sqrt{2}=|1+\delta_{j+1}\overline{\varepsilon_{j+1}}|,$$

melyből $\delta_{j+1}=\pm i\varepsilon_{j+1}$ $(j<\mathbb{N})$ adódik a koszínusz tétel segítségével.

1. Ha $\varepsilon_2=-i\delta_2$, akkor $\mathbf{U}$ legyen az az unitér operátor, melyre

$$\mathbf{U}\vec{e}_1=\vec{e}_1,\quad \mathbf{U}\vec{e}_k=\left(\prod_{j=2}^{k}\delta_j\right)\vec{e}_k\quad(k>1).$$

2. Ha $\varepsilon_2=i\delta_2$, akkor legyen $\mathbf{U}$ a fenti egyenlőségekkel definiált antiunitér operátor.

A $\phi_2(\cdot) := \mathbf{U}^*\phi_1(\cdot)\mathbf{U}$ leképezés is megfelel (WF)-nek. Sőt:

$$\phi_2(\mathbf{P}[\vec{e_j}]) = \mathbf{P}[\vec{e_j}] \quad (\forall\, j) \implies \phi_2(D) \subseteq D,$$

$$\phi_2(\mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e_j} - \vec{e}_{j+1})]) = \mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e_j} - \vec{e}_{j+1})] \quad (\forall\, j),$$

$$\phi_2(\mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e_1} + i\vec{e_2})]) = \mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e_1} + i\vec{e_2})]$$

A $\phi_2(\cdot) := \mathbf{U}^* \phi_1(\cdot) \mathbf{U}$ leképezés is megfelel (WF)-nek. Sőt:

$$\phi_2(\mathbf{P}[\vec{e}_j]) = \mathbf{P}[\vec{e}_j] \quad (\forall\, j) \implies \phi_2(D) \subseteq D,$$

$$\phi_2(\mathbf{P}[1/\sqrt{2} \cdot (\vec{e}_j - \vec{e}_{j+1})]) = \mathbf{P}[1/\sqrt{2} \cdot (\vec{e}_j - \vec{e}_{j+1})] \quad (\forall\, j),$$

$$\phi_2(\mathbf{P}[1/\sqrt{2} \cdot (\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)]) = \mathbf{P}[1/\sqrt{2} \cdot (\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)]$$

fixen maradnak ϕ_2-vel. Az alábbiak is igazak:

$$\phi_2(\mathbf{P}[1/\sqrt{2} \cdot (\vec{e}_j + i\vec{e}_{j+1})]) = \mathbf{P}[1/\sqrt{2} \cdot (\vec{e}_j \pm i\vec{e}_{j+1})] \quad (1 < j < N).$$

A $\phi_2(\cdot) := \mathbf{U}^*\phi_1(\cdot)\mathbf{U}$ leképezés is megfelel (WF)-nek. Sőt:

$$\phi_2(\mathbf{P}[\vec{e}_j]) = \mathbf{P}[\vec{e}_j] \quad (\forall\, j) \implies \phi_2(D) \subseteq D,$$

$$\phi_2(\mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e}_j - \vec{e}_{j+1})]) = \mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e}_j - \vec{e}_{j+1})] \quad (\forall\, j),$$

$$\phi_2(\mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)]) = \mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)]$$

fixen maradnak ϕ_2-vel. Az alábbiak is igazak:

$$\phi_2(\mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e}_j + i\vec{e}_{j+1})]) = \mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e}_j \pm i\vec{e}_{j+1})] \quad (1 < j < N).$$

Tfh. létezik olyan $N > j > 1$, melyre

$$\phi_2(\mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e}_j + i\vec{e}_{j+1})]) = \mathbf{P}[1/\sqrt{2}\cdot(\vec{e}_j - i\vec{e}_{j+1})].$$

Fth. ez a j az első ilyen index.

Állítás. Ekkor

$$\phi_2(\mathbf{P}[v_{j-1}\vec{e}_{j-1} + t\vec{e}_j + v_{j+1}\vec{e}_{j+1}]) = \mathbf{P}[v_{j-1}\vec{e}_{j-1} + t\vec{e}_j + \overline{v_{j+1}}\vec{e}_{j+1}]$$

teljesül minden $t > 0, v_{j-1} \neq 0, v_{j+1} \neq 0, |v_{j-1}|^2 + t^2 + |v_{j+1}|^2 = 1$ esetén.

Állítás. Ekkor

$$\phi_2(\mathbf{P}[v_{j-1}\vec{e}_{j-1} + t\vec{e}_j + v_{j+1}\vec{e}_{j+1}]) = \mathbf{P}[v_{j-1}\vec{e}_{j-1} + t\vec{e}_j + \overline{v_{j+1}}\vec{e}_{j+1}]$$

teljesül minden $t > 0, v_{j-1} \neq 0, v_{j+1} \neq 0, |v_{j-1}|^2 + t^2 + |v_{j+1}|^2 = 1$ esetén.

Állítás bizonyítása. $\ldots\square$

Állítás. Ekkor

$$\phi_2(\mathbf{P}[v_{j-1}\vec{e}_{j-1} + t\vec{e}_j + v_{j+1}\vec{e}_{j+1}]) = \mathbf{P}[v_{j-1}\vec{e}_{j-1} + t\vec{e}_j + \overline{v_{j+1}}\vec{e}_{j+1}]$$

teljesül minden $t > 0, v_{j-1} \neq 0, v_{j+1} \neq 0, |v_{j-1}|^2 + t^2 + |v_{j+1}|^2 = 1$ esetén.

Állítás bizonyítása. $\ldots \square$

Végül legyen

$$\vec{x} = \frac{-1}{2}\vec{e}_{j-1} + \frac{1}{2}\vec{e}_j + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_{j+1}, \quad \vec{y} = \frac{i}{2}\vec{e}_{j-1} + \frac{1}{2}\vec{e}_j + \frac{i}{\sqrt{2}}\vec{e}_{j+1}.$$

Állítás. Ekkor

$$\phi_2(\mathbf{P}[v_{j-1}\vec{e}_{j-1} + t\vec{e}_j + v_{j+1}\vec{e}_{j+1}]) = \mathbf{P}[v_{j-1}\vec{e}_{j-1} + t\vec{e}_j + \overline{v_{j+1}}\vec{e}_{j+1}]$$

teljesül minden $t > 0, v_{j-1} \neq 0, v_{j+1} \neq 0, |v_{j-1}|^2 + t^2 + |v_{j+1}|^2 = 1$ esetén.

Állítás bizonyítása. $\ldots\square$

Végül legyen

$$\vec{x} = \frac{-1}{2}\vec{e}_{j-1} + \frac{1}{2}\vec{e}_j + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_{j+1}, \quad \vec{y} = \frac{i}{2}\vec{e}_{j-1} + \frac{1}{2}\vec{e}_j + \frac{i}{\sqrt{2}}\vec{e}_{j+1}.$$

A fenti Állítás és (WF) implikálja, hogy

$$\sqrt{2}/4 = |i/4 + 1/4 - i/2| = |i/4 + 1/4 + i/2| = \sqrt{10}/4,$$

ami nyilván nem igaz.

Állítás. Ekkor

$$\phi_2(\mathbf{P}[v_{j-1}\vec{e}_{j-1} + t\vec{e}_j + v_{j+1}\vec{e}_{j+1}]) = \mathbf{P}[v_{j-1}\vec{e}_{j-1} + t\vec{e}_j + \overline{v_{j+1}}\vec{e}_{j+1}]$$

teljesül minden $t > 0, v_{j-1} \neq 0, v_{j+1} \neq 0, |v_{j-1}|^2 + t^2 + |v_{j+1}|^2 = 1$ esetén.

Állítás bizonyítása. $\ldots \square$

Végül legyen

$$\vec{x} = \frac{-1}{2}\vec{e}_{j-1} + \frac{1}{2}\vec{e}_j + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_{j+1}, \quad \vec{y} = \frac{i}{2}\vec{e}_{j-1} + \frac{1}{2}\vec{e}_j + \frac{i}{\sqrt{2}}\vec{e}_{j+1}.$$

A fenti Állítás és (WF) implikálja, hogy

$$\sqrt{2}/4 = |i/4 + 1/4 - i/2| = |i/4 + 1/4 + i/2| = \sqrt{10}/4,$$

ami nyilván nem igaz. Tehát ϕ_2-nek identikusan kell hatni az R-en, s így a $\mathcal{P}_1$-n is. Következésképpen ϕ a várt alakú. $\square$

Bizonyítás a nem szeparábilis esetben

Bizonyítás. Az alábbi módon indexelünk egy ONB-t:

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \cup \{\vec{e}_{\vartheta,j} : \vartheta \in \Theta, j \in \mathbb{N}, j \geq 3\}.$$

Ha $j \in \{1, 2\}$ akkor $\vec{e}_{\vartheta,j} := \vec{e}_j$.

Bizonyítás. Az alábbi módon indexelünk egy ONB-t:

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \cup \{\vec{e}_{\vartheta,j} : \vartheta \in \Theta, j \in \mathbb{N}, j \geq 3\}.$$

Ha $j \in \{1, 2\}$ akkor $\vec{e}_{\vartheta,j} := \vec{e}_j$. Bevezetve egy ϕ_1 új transzformációt kapjuk, hogy

$$\phi_1(\mathbf{P}[\vec{e}_{\vartheta,j}]) = \mathbf{P}[\vec{e}_{\vartheta,j}] \quad (\vartheta \in \Theta, j \in \mathbb{N})$$

Bizonyítás. Az alábbi módon indexelünk egy ONB-t:

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \cup \{\vec{e}_{\vartheta,j} \colon \vartheta \in \Theta, j \in \mathbb{N}, j \geq 3\}.$$

Ha $j \in \{1, 2\}$ akkor $\vec{e}_{\vartheta,j} := \vec{e}_j$. Bevezetve egy ϕ_1 új transzformációt kapjuk, hogy

$$\phi_1(\mathbf{P}[\vec{e}_{\vartheta,j}]) = \mathbf{P}[\vec{e}_{\vartheta,j}] \quad (\vartheta \in \Theta, j \in \mathbb{N})$$

Legyen

$$\mathcal{K}_\vartheta = \vee\{\vec{e}_{\vartheta,1}, \vec{e}_{\vartheta,2}, \vec{e}_{\vartheta,3}, \vec{e}_{\vartheta,4}, \dots\}.$$

A $\phi_1|\mathcal{P}_1(\mathcal{K}_\vartheta)$ megszorítás kielégíti (WF)-t a $\mathcal{K}_\vartheta$ altéren. A szeparábilis esetben látott módon választható egy $\mathbf{U}_\vartheta$ diagonális unitér vagy antiunitér operator, mely segítségével ϕ_1 áttranszformálható ϕ_2-vé úgy, hogy $\phi_2|\mathcal{P}_1(\mathcal{K}_\vartheta)$ az identikus leképezés legyen.

Bizonyítás. Az alábbi módon indexelünk egy ONB-t:

$$\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} \cup \{\vec{e}_{\vartheta,j} \colon \vartheta \in \Theta, j \in \mathbb{N}, j \geq 3\}.$$

Ha $j \in \{1,2\}$ akkor $\vec{e}_{\vartheta,j} := \vec{e_j}$. Bevezetve egy ϕ_1 új transzformációt kapjuk, hogy

$$\phi_1(\mathbf{P}[\vec{e}_{\vartheta,j}]) = \mathbf{P}[\vec{e}_{\vartheta,j}] \quad (\vartheta \in \Theta, j \in \mathbb{N})$$

Legyen

$$\mathcal{K}_\vartheta = \vee\{\vec{e}_{\vartheta,1}, \vec{e}_{\vartheta,2}, \vec{e}_{\vartheta,3}, \vec{e}_{\vartheta,4}, \dots\}.$$

A $\phi_1|\mathcal{P}_1(\mathcal{K}_\vartheta)$ megszorítás kielégíti (WF)-t a $\mathcal{K}_\vartheta$ altéren. A szeparábilis esetben látott módon választható egy $\mathbf{U}_\vartheta$ diagonális unitér vagy antiunitér operator, mely segítségével ϕ_1 áttranszformálható ϕ_2-vé úgy, hogy $\phi_2|\mathcal{P}_1(\mathcal{K}_\vartheta)$ az identikus leképezés legyen.
Vegyük észre, hogy minden $\mathbf{U}_\vartheta$ unitér vagy minden $\mathbf{U}_\vartheta$ antiunitér.

Ezért úgy transzformálható ϕ_2-be a ϕ_1, hogy

$$\phi_2|\mathcal{P}_1(\mathcal{K}_\vartheta) \equiv \mathrm{Id}|\mathcal{P}_1(\mathcal{K}_\vartheta) \quad (\vartheta \in \Theta).$$

Ezért úgy transzformálható ϕ_2-be a ϕ_1, hogy

$$\phi_2|\mathcal{P}_1(\mathcal{K}_\vartheta) \equiv \mathrm{Id}|\mathcal{P}_1(\mathcal{K}_\vartheta) \quad (\vartheta \in \Theta).$$

Állítás.

$$\phi_2 \equiv \mathrm{Id}.$$

Ezért úgy transzformálható ϕ_2-be a ϕ_1, hogy

$$\phi_2|\mathcal{P}_1(\mathcal{K}_\vartheta) \equiv \mathrm{Id}|\mathcal{P}_1(\mathcal{K}_\vartheta) \quad (\vartheta \in \Theta).$$

Állítás.

$$\phi_2 \equiv \mathrm{Id}.$$

Állítás bizonyítás. Tekintünk egy olyan $\mathbf{P}[\vec{v}] \in \mathcal{P}_1$ projekciót, melyre $v_1 \neq 0$. Ezen projekciók halmaza sűrű $\mathcal{P}_1$-ben.

Ezért úgy transzformálható ϕ_2-be a ϕ_1, hogy

$$\phi_2|\mathcal{P}_1(\mathcal{K}_\vartheta) \equiv \mathrm{Id}|\mathcal{P}_1(\mathcal{K}_\vartheta) \quad (\vartheta \in \Theta).$$

Állítás.

$$\phi_2 \equiv \mathrm{Id}.$$

Állítás bizonyítás. Tekintünk egy olyan $\mathbf{P}[\vec{v}] \in \mathcal{P}_1$ projekciót, melyre $v_1 \neq 0$. Ezen projekciók halmaza sűrű $\mathcal{P}_1$-ben.
Legyen

$$\mathbf{P}[\vec{w}] := \phi_2(\mathbf{P}[\vec{v}]), \quad \vec{v}_\vartheta := \sum_{j=1}^{\infty} \langle \vec{v}, \vec{e}_{\vartheta,j} \rangle \vec{e}_{\vartheta,j}, \quad \vec{w}_\vartheta := \sum_{j=1}^{\infty} \langle \vec{w}, \vec{e}_{\vartheta,j} \rangle \vec{e}_{\vartheta,j}.$$

Ezért úgy transzformálható ϕ_2-be a ϕ_1, hogy

$$\phi_2|\mathcal{P}_1(\mathcal{K}_\vartheta) \equiv \mathrm{Id}|\mathcal{P}_1(\mathcal{K}_\vartheta) \quad (\vartheta \in \Theta).$$

Állítás.

$$\phi_2 \equiv \mathrm{Id}.$$

Állítás bizonyítás. Tekintünk egy olyan $\mathbf{P}[\vec{v}] \in \mathcal{P}_1$ projekciót, melyre $v_1 \neq 0$. Ezen projekciók halmaza sűrű $\mathcal{P}_1$-ben.
Legyen

$$\mathbf{P}[\vec{w}] := \phi_2(\mathbf{P}[\vec{v}]), \quad \vec{v}_\vartheta := \sum_{j=1}^{\infty} \langle \vec{v}, \vec{e}_{\vartheta,j} \rangle \vec{e}_{\vartheta,j}, \quad \vec{w}_\vartheta := \sum_{j=1}^{\infty} \langle \vec{w}, \vec{e}_{\vartheta,j} \rangle \vec{e}_{\vartheta,j}.$$

Az (WF)-ből a

$$|v_{\vartheta,j}| = |w_{\vartheta,j}| \quad (\vartheta \in \Theta, j \in \mathbb{N})$$

és

$$|\langle \vec{v}, \vec{v}_\vartheta \rangle| = |\langle \vec{w}, \vec{v}_\vartheta \rangle| \quad (\vartheta \in \Theta)$$

Mivel

$$\sum_{j=1}^{\infty} |v_{\vartheta,j}|^2 = |\langle \vec{v}, \vec{v}_\vartheta \rangle| = |\langle \vec{w}, \vec{v}_\vartheta \rangle| = \Big| \sum_{j=1}^{\infty} |v_{\vartheta,j}|^2 \exp(it_{\vartheta,j}) \Big|,$$

ahol $w_{\vartheta,j} = v_{\vartheta,j} \exp(it_{\vartheta,j})$ és $t_{\vartheta,j} \in [0, 2\pi[$.

Mivel

$$\sum_{j=1}^{\infty} |v_{\vartheta,j}|^2 = |\langle \vec{v}, \vec{v}_\vartheta \rangle| = |\langle \vec{w}, \vec{v}_\vartheta \rangle| = \Big| \sum_{j=1}^{\infty} |v_{\vartheta,j}|^2 \exp(it_{\vartheta,j}) \Big|,$$

ahol $w_{\vartheta,j} = v_{\vartheta,j} \exp(it_{\vartheta,j})$ és $t_{\vartheta,j} \in [0, 2\pi[$. Látható, hogy létezik egy $t_\vartheta \in [0, 2\pi[$ szám úgy, hogy

$$\vec{w}_\vartheta = \exp(it_\vartheta)\vec{v}_\vartheta \quad (\vartheta \in \Theta).$$

Mivel

$$\sum_{j=1}^{\infty} |v_{\vartheta,j}|^2 = |\langle \vec{v}, \vec{v}_\vartheta \rangle| = |\langle \vec{w}, \vec{v}_\vartheta \rangle| = \Big| \sum_{j=1}^{\infty} |v_{\vartheta,j}|^2 \exp(it_{\vartheta,j}) \Big|,$$

ahol $w_{\vartheta,j} = v_{\vartheta,j} \exp(it_{\vartheta,j})$ és $t_{\vartheta,j} \in [0, 2\pi[$. Látható, hogy létezik egy $t_\vartheta \in [0, 2\pi[$ szám úgy, hogy

$$\vec{w}_\vartheta = \exp(it_\vartheta)\vec{v}_\vartheta \quad (\vartheta \in \Theta).$$

Tekintve a fenti egyenlőségben az első koordinátákat kapjuk, hogy

$$\vec{v} = \exp(it)\vec{w}$$

teljesül valamely $t \in [0, 2\pi[$ számmal. $\square$