



Haar Alfréd fizikai matematikája. I-II. [folytatás]

Varró Sándor

**MTA WIGNER FIZIKAI KUTATÓKÖZPONT
Szilárdtestfizikai és Optikai Intézet, Budapest**

**SZTE Elméleti Fizika, 2014. szeptember 18.,
csütörtök, 13:00.**

**Institut für Quantenphysics, Universität Ulm,
06 November 2014.**

**SZTE Elméleti Fizika, 2014. december 18.,
csütörtök, 13:00.**



Haar Alfréd. 1885. október 11., Budapest --- 1933. március 16., Szeged.

»Én Haar Alfréd, 1885. október 11-én születtem Budapesten, Haar Ignác földbirtokos és neje, szül. Fuchs Emma fiaként. Szülővárosomban az evangélikus gimnáziumba jártam, amelyet 1903-ban az érettségi bizonyítvánnyal hagytam el. 1904 húsvétja óta a budapesti egyetemen matematikai, fizikai és csillagászati előadásokat hallgattam. 1905 őszén a göttingai egyetemre iratkoztam be.

Budapesten Beke, báró Eötvös, Fröchlich, Kürschák, Rados, Scholtz, Göttingában Carathéodory, Hilbert, Klein, Minkowski, Prandtl, Runge, Schwarzschild, Voigt, Zermelo előadásain ill. szemináriumain vettem részt. Mindezeket az urakat el nem múló hálám illeti. Különösképpen mélyen lekötelezve érzem magam azonban Hilbert titkos tanácsos úrnak azért a sokoldalú ösztönzésért és sokrétű tanításért, amelyet egész göttingai tanulmányi időm alatt előadásai és személyes érintkezés révén nyújtott; állandó ösztönző érdeklődéséért legmélyebb hálámat fejezem ki.<<

[1] Haar A, *Összegyűjtött Munkái*. Sajtó alá rendezte Szőkefalvi-Nagy Béla (Akadémia Kiadó, Budapest, 1959). Bevezetés, Haar Alfréd rövid életrajza.

„ Tegyük ehhez hozzá, hogy a gimnáziumban Rátz László, a *Középiskolai Matematikai Lapok* érdemes szerkesztője volt a matematika-tanára. Ennek a lapnak Haar is szorgalmas munkatársa volt középiskolás korában. Az előző évben érettségizettek számára évenként tartott >>Eötvös Loránd matematikai verseny<<-en 1903 őszén Haar Alfréd nyerte az első díjat. Ez a siker jegyezte el az érettségije után először vegyész-mérnök-hallgatónak beiratkozott fiatalembert végleg a matematikával.

A doktori szigorlatot 1909. június 16-án tette le a göttingai egyetem bölcsészeti karán, disszertációjának Hilbert volt a referense. Alig néhány hónap múlva, még 1909-ben ugyanez a kar magántanárrá habilitálta.

Miután rövid ideig a zürichi műegyetem helyettes tanára volt, 1912-ben a Budapestre meghívott Fejér Lipót utódjaként a kolozsvári egyetem egyik matematika-fizika tanszékére nevezték ki, először nyilvános rendkívüli tanárrá; majd 1917-ben nyilvános rendes tanárrá; a másik tanszék tanára Riesz Frigyes volt.

Az első világháború után Erdélynek Magyarországtól való elcsatolása következtében az addigi kolozsvári egyetem tanárainak el kellett hagyniuk e várost és előbb átmenetileg Budapesten, majd 1920-tól Szegeden folytatták működésüket. Haar Alfréd és Riesz Frigyes az új szegedi matematikai szemináriumot – amelyet később Bolyai Intézetnek neveztek el – hamarosan nemzetközi tekintélyű matematikai centrummá fejlesztették: ebben nagy szerepet játszott az a folyóirat, az *Acta Scientiarum Mathematicarum*, amelyet Haar és Riesz 1922-ben alapítottak (mint az egyetem *Acta*-inak matematikai szekcióját).

Egyetemi előadásainak tárgyát Haar leginkább az algebra számelmélet, analitikus geometria, mechanika, differenciálegyenletek, variációszámítás, folytonos csoportok elmélete területeiről választotta. Elsőrangú egyetemi előadó volt, előadásai világosságban, logikus felépítésben mintaszerűek voltak.

A Magyar Tudományos Akadémia 1931-ben Haart levelező tagjává választotta.

Egyetemi tanári működését Szegeden egészen az 1933. március 16-án bekövetkezett haláláig folytatta. A gyilkos betegség (gyomorrák) okozta halál életének legalkotóbb szakaszában, 48-ik életévében, néhány hónapos szenvedés után ragadta el az élők sorából. Szülővárosában, Budapesten van eltemetve.”

[1] Haar A, *Összegyűjtött Munkái*. Sajtó alá rendezte Szőkefalvi-Nagy Béla (Akadémia Kiadó, Budapest, 1959). Bevezetés, Haar Alfréd rövid életrajza

A BUDAPESTI ÁGOSTAI HITV. EVANG. FŐGYMNASIUM
Ia. osztályának
BIZONYÍTVÁNYKÖNYVE

az 1895/6 tanévről.

Scholtz Albert
osztálytanár.

**A Budapesti Ágostai Hitv. Evang.
FŐGYMNASIUM Ia osztályának
ÉRTESÍTŐJE az 1895/6 tanévről.
Scholtz Albert osztálytanár.**

Tanuló neve és kora	Haza, osztály és lakcíme	Vallása
R. Fleer Alfred 1895 okt. 11.	Budapest	ar.
I. Félév.		
Általános osztályzat: jó		
Magaviselete :	jó	General note: good
Figyelme :	jó	His behaviour: good
Szorgalma :	jó	His attention: good
		His diligence: good
Vallástan :	jó	Religion study: good
Latin nyelv :	elég	Latin language: pass mark
Görög nyelv :	---	Greek language: ---
Magyar nyelv :	jól	Hungarian language: excellent
Német nyelv :	jól	German language: excellent
Történelem :	---	History: ---
Földrajz :	jó	Geography: good
Számítás :	jól	Mathematics (arithmetics): good
Mértan :	jó	Geometry, geometrical drawing: good
Mértani rajz :	jó	
Természet-		Nature- Psychology- Logics-
Lélektan :		
Logika :		
Testgyakorlat :	elég	Gymnastics: pass mark
Szépíráás :	jó	Writing: good
Ének :	elég	Singing: pass mark
Írásbeli dolgozatok kialakakja :	nem elég rendszeres	Appearance of his written exercises: not enough ordered
Mulasztott órák száma :	37 ig.	

A PESTI ÁGOST. HITV. EVANG. MAGYAR ÉS NEMET EGYHÁZKÖZSÉG
GYMNAZIUMÁNAK TERVE

FŐHOMLOKZAT



**A Budapesti Ágost. Hitv. Evang. FŐGYMNASIUM ÉRTESÍTŐJE Az 1903/1904-iki iskolai évről.
Közzéteszi GÓBI IMRE, E. I. Igazgató (Budapest, Franklin-Társulat Könyvnyomdája, 1904)**



László Rátz [09. 04. 1863. – 30. 09. 1930.]
Teacher of mathematics of Alfred Haar



Sándor Mikola [16. 04. 1871. – 01. 10. 1945.]
Teacher of physics of Alfred Haar

László Rátz



 FACULTY OF EDUCATION 

László Kovács

**László Rátz
and
John von Neumann**

A Gifted Teacher and his Brilliant Pupil



Winnipeg, Manitoba, Canada
2003

Left: Eugene P. Wigner in his office at the Princeton University, displaying Einstein's photo, taken from besides the photo of László Rátz, Wigner's secondary school teacher of mathematics. [1912-1920]

Right: The cover page of the book by Kovács L, *László Rátz and John von Neumann. A gifted teacher and his brilliant pupil* (Winnipeg, Manitoba, Canada, 2003).

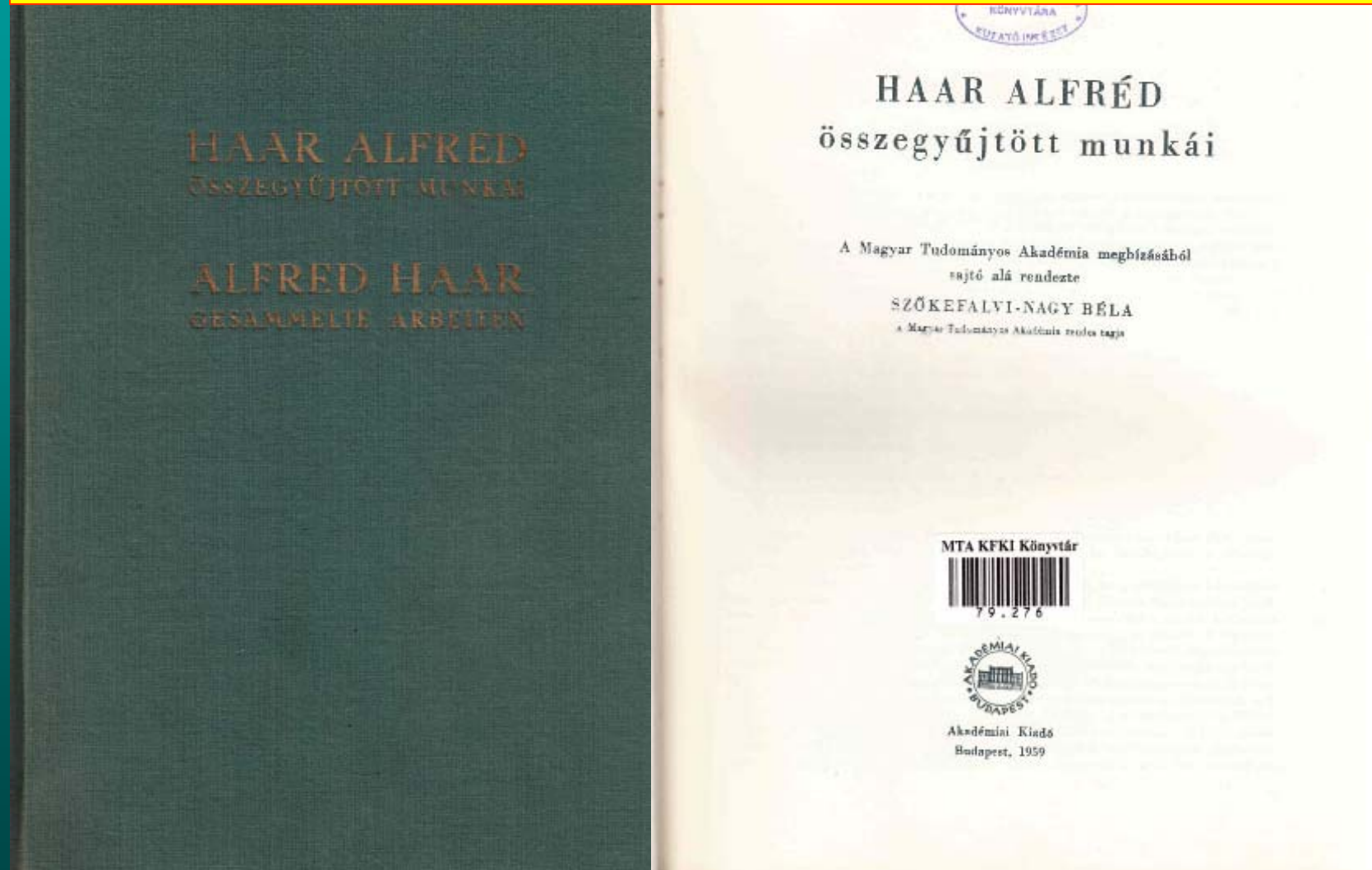
Concerning the left photo see more: Kovács L, Eugene Wigner, pupil of a legendary school. In Varró S, Ádám P, Bíró T S, Barnaföldi G G and Lévai P (Editors), *Proceedings of the Wigner 111 – Colourful & Deep Scientific Symposium. EPJ Web of Conferences* 78, 01007 (2014). DOI: 10.1051/epjconf/20147801007

Az előadás vázlata.

- Haar szerepe a matematikában a XX. század elején. ✓
- Néhány másolat Haar egyetemi előadásjegyzeteiből. ✓
- A Haar – féle ortogonális függvényrendszer. 'Haar wavelet'. ✓
- Haar-wavelet később. Néhány wavelet-alkalmazás. Illusztrációk. ✓
- A Haar – féle lemma variációszámításban. ←
- A Haar – féle invariáns mérték. Integrál. ←

Haar A, *Összegyűjtött Munkái*. Sajtó alá rendezte Szőkefalvi-Nagy Béla (Akadémia Kiadó, Budapest, 1959)

My primary source: Haar A, *Gesammelte Arbeiten*. Herausgegeben von Béla Szőkefalvi-Nagy (Verlag der Akademie der Wissenschaften, Budapest, 1959)



Haar A, *Gesammelte Arbeiten*. Herausgegeb. von Szőkefalvi-Nagy Béla (Akadémia Kiadó, Budapest, 1959). From the Introduction written by Béla Szőkefalvi-Nagy ['B. Sz-Nagy']: „Alfred Haar is one of those mathematicians whose work had a generally respected great influence on the newest development of mathematics. This holds for his work on the series of orthogonal functions, and on the calculus of variation, but it particularly holds for his work on continuous groups, being at the same time his last work, on the basis of which held his inauguration talk as a member of the Hungarian Academy of Sciences. His early dead prevented him to take part in working out the consequences of this fundamental discovery....”

Áll ez a folytonos csoportokra vonatkozó, egyben utolsó munkájára, amely egyébként székfoglaló tanulmánya volt a Magyar Tudományos Akadémián. Korai halála megakadályozta, hogy alapvető felfedezése következményeinek kiaknázásában maga is részt vegyen.

A Magyar Tudományos Akadémia már évekkel ezelőtt elhatározta, hogy kiadja Haar Alfréd összegyűjtött munkáit; a kiadás most, röviddel Haar halálának 25-ik évfordulója után valósul meg. Ez a 25 év elegendő volt ahhoz, hogy Haar tudományos teljesítményének egész jelentősége tisztán kibontakozzék.

Haar Alfréd rövid életrajza után dolgozatainak jegyzékét közöljük, időrendi sorrendben. Ezután következnek maguk a dolgozatok, az alábbi, tárgykörök szerinti csoportosításban:

- A. Halmazelmélet. Set theory
- B. Ortogonális függvények és szinguláris integrálok. Series of orthogonal functions and singular integrals
- C. Analitikus függvények. Analytic functions
- D. Parciális differenciálegyenletek. Partial differential equations
- E. Variációszámítás. Calculus of variation
- F. Függvényapproximációk és lineáris egyenlőtlenségek. Approximation theory and linear inequalities
- G. Diszkrét csoportok és függvényalgebrák. Discrete groups and function algebras
- H. Folytonos csoportok. Continuous groups

Az egyes dolgozatcsoportok elé néhány, az illető vizsgálatokra vagy mások által végzett közvetlen folytatásukra vonatkozó jegyzetet illesztettünk be, természetesen a teljességre való minden igény nélkül.



From left to right: Alfréd Haar, Franz Hilbert, Hermann Minkowski, unknown, Käthe Hilbert, David Hilbert, Ernst Hellinger.

Riesz 1911-ben, Haar 1912-ben kifejezetten Farkas Gyula közbenjárására került a kolozsvári egyetemre:

**„Nagyságos Dr. Fejér Lipót
Tud. Egyetemi tanár úrnak
Budapest, Nádor u. 51. V. em.**

Kiválóan Tisztelt és Kedves Tanártársam !

Íme Riesz Frigyes társunk már javában megkezdte itteni működését nagy lelkesedéssel a math. szeminárium körül is. ... Tegnap levelet kaptam Haartól. ... Egyébiránt Haar levele oly mély hazafias érzelmeket árul el, hogy mostmár nem is tartok attól, hogy ha egyszer haza került, elveszítsük a külföldnek....

**Boldog életet kívánok új lakásában
Igaz barátja, Farkas Gyula”
[8].**

[8] Prékopa András, Farkas Gyula élete és munkásságának jelentősége az optimalizálás elméletében. In Martinás Katalin (Szerk.), *Farkas Gyula élete és munkássága*. (ELFT Termodinamikai Szakcsoport, Budapest, 2003) pp 9-26.



Before „Trianon” [1920] Google earth would have displayed like this.



The red arrow shows Kolozsvár [Klausenburg, now Cluj in Romania], where Riesz and Haar had chairs of mathematics. Already in 1919, one year before the Trianon Treaty, they were driven from Kolozsvár, because they did not sign a statement on their loyalty towards the newly forming Romanian state. In fact ALL the teachers and the complete university was driven out from Kolozsvár! [Note on the name: 04 June 1920:Trianon Treaty between Hungary and the Entente (the Trianon palais is a part of Versailles, France)]

„ Az első világháború elvesztése következtében Erdély román megszállás alá került. A román hatóságok, nem várva meg a békekötést, az egyetem tanári karától hűségesküti kérétek, majd ennek megtagadása miatt az egyetemet Kolozsvárról kiutasították. Az egyetem 1919-ben átmenetileg Budapestre került, s a jogfolytonosság fennmaradása érdekében a hasonló sorsú pozsonyi Erzsébet Egyetemmel közös félévet hirdetett meg és indított....

A menekült egyetem az 1921/22-es tanévtől kezdődően Szegeden talált otthonra. ... Az oktatás megindításán túl Riesz és Haar fáradhatatlan szervező munkába kezdett a kutatáshoz és oktatáshoz elengedhetetlenül szükséges könyvek valamint folyóiratok beszerzése és gyarapítása érdekében is. Ma látjuk igazán, hogy ezen a területen is zseniálisak voltak. ... A Vallás- és Közoktatásügyi Minisztériumnál sikerült elérni, hogy Demeczky Mihály értékes matematikai könyvtárát megvásárolják, Farkas Gyula pedig a Matematikai Szemináriumnak ajándékozta saját könyvtárát. A helyzetet - és a küzdelmet - jellemzi a következő anekdotikus igaz történet. Haar professzor, aki igen jó viszonyban volt Klebelsberg Kunóval, ecsetelte a miniszternek, milyen katasztrofális az Intézet könyvvel és folyóirattal való ellátottsága. Klebelsberg kinyomoztatta, hogy van egy Hámori Bíró Pál nevű gyáros, egyben országgyűlési képviselő, aki "Hámori" előnévéért tartozik az államnak 25.000 pengővel. Közbenjárt, hogy ezt az összeget Bíró a szegedi egyetem Matematikai Szemináriumának utaltassa át a könyvtár gyarapítására

Az igazi fejlődést és színvonalat azonban a folyóiratgyűjtemény jelentette. Riesz és Haar felvetették, hogy matematikai folyóiratot kellene indítani, mégpedig nem akármilyet, hanem világszínvonalút. Erre az anyagi fedezetet egy társadalmi egyesület létrehozásával teremtették meg. A város nagyjai és tehető s polgárai létrehozták a Ferencz József Tudományegyetem Barátainak Egyesületét. Riesz és Haar levélben fordultak a világ ismert matematikusaihoz, akik közt sokan személyes ismerőseik voltak, és cikket kértek tőlük. Ők maguk is itt helyezték el legjobbnak tartott publikációikat , és erre kérték arra érdemes tanítványaikat: Radó Tibort, Szőkefalvi-Nagy Gyulát és másokat is. Így sikerült néhány év alatt világszínvonalúvá fejleszteni a lapot. Ragadjunk ki néhány nevet a fiatal Acta köteteiből: Fejér Lipót, Neumann János, Pólya György, Szegő Gábor, Riesz Marcell, Lánosz Kornél, Norbert Wiener, George D. Birkhoff, Henri Cartan, Antoni Zygmund, Egerváry Jenő, a még egyetemi hallgató Erdős Pál és természetesen a helyiek: Riesz, Haar, Kerékjártó”

[Csákány Béla – Varga Antal , A szegedi egyetemi matematikai intézetek hetvenöt éve.]



RIESZ
FRIGYES
1880
1956



HAAR
ALFRED
1885
1933



A SZEGEDI MATEMATIKAI ISKOLA
VILAGHIRŰ MEGALAPÍTÓI



1. Die Randwertaufgabe der Differentialgleichung . *Göttingen Nachrichten* **1907**, 280-287.
2. Egyszerűen rendezett halmazokról. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, Budapest **27**, 138-151 (1909). On simply-ordered sets. (Alfréd Haar és Dénes König)
3. Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandtrigen Medien. *Göttingen Nachrichten* **1909**, 204-218. (Alfréd Haar und Theodor von Kármán)
4. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (*Inaugural Dissertation* zur Erlangung der Doktorwürde der hohen philosophischen Fakultät der Georg-August-Universität zu Göttingen, vorgelegt von Alfred Haar aus Budapest). **1909**, 1-49.
5. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Erste Mitteilung). *Mathematische Annalen* **69**, 331-371 (1910)
6. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Zweite Mitteilung). *Mathematische Annalen* **71**, 38-53 (1911)
7. Über einfach geordnete Mengen. *Journal für reine und angewandte Mathematik* **139**, 16-28 (1911) (Alfréd Haar und Dénes König)
8. Über die Legendre'sche Reihe. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **32**, 132-142 (1911)
9. Egy ortogonális függvényrendszeréről. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, Budapest **32**, 60-68 (1914).
- 10.a Über analytische Funktionen mit singulärer Linie. *Göttingen Nachrichten* **1914**, 115-123 (1914)
11. A kettős integrálok variációjáról. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, Budapest **35**, 1-19 (1917).
12. Reihenentwicklungen nach Legendre'schen Polynomen. *Mathematische Annalen* **78**, 121-136 (1918)

13. Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen. *Mathematische Annalen* **78**, 294-311 (1918)

14. A lineáris egyenlőtlenségekről. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, Budapest **36**, 279-296 (1918).

15. Über die Variation der Doppelintegrale. *Journal für reine und angewandte Mathematik* **149**, 1-18 (1919)

16.a Über eine Verallgemeinerung de Du Bois-Reymond'schen Lemmas. *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged* **1**, 33-38 (1922) (= Acta Litteratum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco Josephinae, sectio Scientiarum Mathematicarum, Szeged)

17. Über die Konvergenz von Funktionenfolgen. *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged* **1**, 167-179 (1922)

18. Über lineare Ungleichungen. *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged* **2**, 1-14 (1924)

19. Über asymptotische Entwicklungen von Funktionen. *Mathematische Annalen* **96**, 69-107 (1926)

20. Über das Plateausche Problem. *Mathematische Annalen* **97**, 127-158 (1926)

21. Über reguläre Variationsprobleme. *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged* **3**, 224-234 (1927)

22. Sur l'unicité des solutions des equations aux dérivées partielles. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **187**, 23-25 (1928)

23. Zur Charakteristikentheorie. *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged* **4**, 103-114 (1928)

24. Über adjungierte Variationsprobleme und adjungierte Extremalflächen. *Mathematische Annalen* **100**, 481-502 (1928)

25. Über einige Eigenschaften der orthogonalen Funktionensysteme. *Mathematische Zeitschrift* **31**, 128-137 (1929)

26. Über Eindeutigkeit und Analytizität der Lösungen partieller Differentialgleichungen. *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3-10 Settembre 1922*, **3**, 5-10 (1930).

27. Zur Variationsrechnung. Drei Vorträge gehalten am Mathematischen Seminars der Hamburgischen Universität (23-25. Juli 1929). *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminars der Hamburgischen Universität* **8**, 1-27 (1930)

28. Über die Multiplikationstabelle der orthogonale Funktionensysteme. *Mathematische Zeitschrift* **31**, 769-798 (1930)

29. A csoportkarakterisztikák elméletéről. *Matematikai és Fizikai Lapok*, Budapest **38**, 132-145 (1931)

30. A csoportkarakterisztikák elméletéről (Második közlemény). *Matematikai és Fizikai Lapok*, Budapest **39**, 6-16 (1932)

31. Über unendliche kommutative Gruppen. *Mathematische Zeitschrift* **33**, 129-159 (1932)

32. Über die Gruppencharaktere gewisser unedlichen Gruppen. *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged* **5**, 172-186 (1932)

33. A folytonos csoportok elméletéről. *Matematikai és Természettudományi Értesítő*, Budapest **49**, 287-307 (1932).

34. Der Maßbegriff in der Theorie der Kontinuierlichen Gruppen. *Annals of Mathematics* (2) **34**, 147-169 (1933)
(The concept of measure in the theory of continuous groups.)

35. Über die Multiplikationstabelle der unitär-orthogonalen Funktionensysteme. *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa (Science Fisiche e Matematiche)* (2) **2**, 21-40 (1933)

A Haar – lemma variációszámításban.

A KETTŐS INTEGRÁLOK VARIÁCIÓJÁRÓL.

HAAR ALFRÉD-től.

A variációs számítás alaptételén — a mennyiben olyan problémákról van szó, a melyekben az ismeretlen függvény csak egy változótól függ — a következő, Du Bois REYMOND-tól eredő, lemmát szokás érteni:

Ha $u(x)$ folytonos függvénye az x -nek az $x_1 \leq x \leq x_2$ intervallumban és ha

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x) \frac{d\zeta}{dx} dx = 0,$$

mindazokra a $\zeta(x)$ függvényekre nézve, melyek intervallumunkban folytonosan differenciálhatók és az intervallum határain eltűnnek, akkor $u(x) = \text{const.}$

E tétel segítségével minden nehézség nélkül levezethető a variációs számítás úgynevezett EULER-LAGRANGE-féle differenciálegyenlete, anélkül, hogy a variácioprobléma megoldásáról egyebet kellene feltételezni, mint azt, hogy első differenciálhányadosa folytonos függvény.

Ezzel ellentétben a variációs számítás ama legegyszerűbb feladatainál, melyeknél az ismeretlen függvény két független változótól függ, eddigelé nem sikerült a keresett függvény számára differenciálegyenleteket felállítani a nélkül a — teljesen természetellenes — megszorítás nélkül, hogy a keresett függvény második differenciálhányadosai is létezzenek. HADAMARD¹ egy egyszerű példával kimutatta, hogy ebben az esetben az első variatio eltűnéséből nem következik a keresett függvény má-

¹ Comptes Rendus (1907) T. 144. p. 1002—1093.

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x)) dx$$

$$\delta I = 0$$

Du Bois-Reymond
Lemma

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x) \frac{d\zeta}{dx} dx = 0$$

$$u(x) = \text{const.}$$

Euler-Lagrange
egyenlet

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

Haar A, A kettős integrálok variációjáról. *Math. Term. Értesítő* 35, 1-19 (1917); [2a] Haar A, Über die Variation der Doppelintegrale. *Journal für reine und angewandte Mathematik* 149, 1-18 (1919).

Ezek után első pillanatra lehetetlennek tűnik fel egy kettős integrál első variációjának eltűnését további megszorítás nélkül, differenciálegyenletek segítségével kifejezni; más szóval a megfelelő variatioprobléma megoldására differenciálegyenleteket vezetni anélkül, hogy e megoldás második differenciálhányadosának létezését feltételeznők. Ennek dacára sikerül egy ilyen differenciálegyenlet levezetése egy olyan tétel segítségével, mely mindenben analog a fent említett Du Bois REYMOND-féle tétellel s a mely a kétváltozós függvények elméletében ugyanazt a szerepet játszsza, mint amaz az egyváltozós függvények körében.

Ez a tétel, melynek bebizonyítása legfőbb czélja ennek a dolgozatnak, a következőképen hangzik:

Ha $u(x, y)$ és $v(x, y)$ olyan függvényei az x és y független változóknak, melyek egy megadott T tartomány belsejében folytonosak, és ha

$$\iint_{(T)} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

mindazokra a $\zeta(x, y)$ függvényekre nézve, melyek e tartomány határán elűnnek, belsejében pedig x és y szerint folytonosan differenciálhatók, akkor — bármely a T tartomány belsejében fekvő zárt görbét jelöl G — a következő integrál:

$$\int_{(G)} (u dy - v dx)$$

értéke zérussal egyenlő. Más szóval a mondott feltételek mellett létezik egy oly $\omega(x, y)$ függvény, melynek első differenciálhányadosai tartományunkban folytonosak s a mely kielégíti a

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -v(x, y), \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = u(x, y)$$

egyenleteket.

$$\iint_B f(p, q, z, x, y) dx dy = \min$$

$$p \equiv \partial z(x, y) / \partial x \quad q \equiv \partial z(x, y) / \partial y$$

$$\iint_{(T)} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

$$\int_{(G)} (u dy - v dx) = 0$$

$$\partial \omega / \partial x = -v(x, y)$$

$$\partial \omega / \partial y = u(x, y)$$

Haar A, A kettős integrálok variációjáról. *Math. Term. Értesítő* 35, 1-19 (1917); [2a] Haar A, Über die Variation der Doppelintegrale. *Journal für reine und angewandte Mathematik* 149, 1-18 (1919).

Über eine Verallgemeinerung des Du Bois Reymond'schen Lemma's.

VON ALFRED HAAR.

Das bekannte Lemma, das Du Bois Reymond¹⁾ zur Begründung der Variationsrechnung aufstellte, ist wegen seiner Wichtigkeit vielfach behandelt worden. Von den neueren Beweisen erwähne ich nur die von *Hilbert*²⁾ und *Jacobsthal*³⁾, sowie diejenigen die *Hadamard* in seinem Lehrbuch gegeben hat. Ich möchte in den folgenden Zeilen eine neue Methode zur Begründung dieses Lemma's auseinandersetzen, die besonders rasch zum Ziel führt. Mit dieser Methode beweise ich zuerst das Lemma selbst, sodann seine bekannten Verallgemeinerungen, die von Zermelo herrühren⁴⁾ Zum Schlusse wende ich diese Methode an zur Ableitung eines Satzes, der — wie mir scheint — neu ist; dieser Satz wirft neues Licht auf den Zusammenhang eines linearen Differentialausdruck's

$$L[\eta] \equiv \eta^{(k)}(x) + p_1(x)\eta^{(k-1)}(x) + p_2(x)\eta^{(k-2)}(x) + \dots + p_{k-1}(x)\eta'(x) + p_k(x)\eta(x)$$

(wo die $p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x)$ beliebig oft differentierbare Funktionen bedeuten) und des zugehörigen adjungierten Differentialausdruck's

$$\Lambda[\eta] \equiv \eta^{(k)} - (p_1\eta)^{(k-1)} + (p_2\eta)^{(k-2)} - \dots + (-1)^k(p_k\eta)$$

Ich beweise nämlich, dass, wenn $u(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion bedeutet, von der Beschaffenheit, dass das Integral

¹⁾ Mathematische Annalen Bd. 15 (1879) p. 564.

²⁾ s. Bolza: Lehrbuch der Variationsrechnung p. 28.

³⁾ Archiv für Mathematik. (Berliner math. Ges). 1910.

⁴⁾ Mathematische Annalen Bd. 58 (1904) p. 558.

$$L[\eta] \equiv \eta^{(k)}(x) + p_1(x)\eta^{(k-1)}(x) + \dots + p_{k-1}(x)\eta'(x) + p_k(x)\eta(x)$$

$$\Lambda[\eta] \equiv \eta^{(k)} - (p_1\eta)^{(k-1)}(x) + \dots + (-1)^k(p_k\eta)$$

Haar A, Über eine Verallgemeinerung der Du Bois-Reymond'schen Lemmas. *Acta Sci. Mathematicarum Szeged* 1, 33-38 (1922). Ez egy másik 'Haar-lemma' !!!

$$\int_a^b u(x) L[\eta(x)] dx$$

stets verschwindet, wenn $\eta(x)$ *irgendeine* im Intervall $[a, b]$ k -mal stetig differenzierbare Funktion bedeutet, die an den Endpunkten dieses Intervalls samt ihren ersten $(k-1)$ Ableitungen verschwindet, so ist $u(x)$ selbst k -mal differenzierbar und eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Lambda[u] = 0.$$

1. Die im Intervall $[a, b]$ definierte stetige Funktion $u(x)$ erfülle die Bedingung

$$\int_a^b u(x) \frac{d\eta}{dx} dx = 0$$

für jede im Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbare und an den Endpunkten des Intervalls verschwindende Funktion $\eta(x)$. Nach dem fraglichen Lemma muss dann $u(x) = \text{const.}$ sein; dies beweise ich, wie folgt:

Sind α und β zwei beliebige im betrachteten Intervall gelegene Stellen ($\alpha < \beta$), so betrachte ich diejenige Funktion, die für $a \leq x \leq \alpha$ und $\beta \leq x \leq b$ gleich Null ist, für $\alpha \leq x \leq \beta$ aber mit der Funktion $(x-\alpha)^2 (x-\beta)^2$ übereinstimmt. Diese Funktion ist im ganzen Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar und verschwindet an den Endpunkten dieses Intervalls. Demzufolge ist für jedes den Ungleichungen $a \leq \alpha < \beta \leq b$ unterworfenen α, β

$$\omega(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} u(x) \frac{d}{dx} [(x-\alpha)^2 (x-\beta)^2] dx = 0.$$

Diese Funktion $\omega(\alpha, \beta)$ ist nach den Parametern α, β jedenfalls differenzierbar und man findet leicht für den gemischten zweiten Differenzialquotienten den Ausdruck

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = 4 \int_{\alpha}^{\beta} u(x) \frac{d}{dx} [(x-\alpha)(x-\beta)] dx = 0.$$

$$\int_a^b u(x) L[\eta(x)] dx = 0$$



$$\Lambda[u(x)] = 0$$

Ha $u(x)$ folytonos függvénnyel képzett bármely k -szor differenciálható $\eta(x)$ függvénnyel a fenti integrál nulla, akkor $u(x)$ maga is k -szor differenciálható, és kielégíti az adjungált egyenletet; $\Lambda[u(x)] = 0$.

Haar A, Über eine Verallgemeinerung der Du Bois-Reymond'schen Lemmas. *Acta Sci. Mathematicarum Szeged* 1, 33-38 (1922). Ez egy másik 'Haar-lemma' !!!

Über das Plateausche Problem.

Von

Alfred Haar in Szeged (Ungarn).

Einleitung.

Riemann widmete der Theorie der Minimalflächen eine grundlegende Abhandlung; von ihm rührt einer der schönsten Sätze dieses Ideenkreises her, der einer der Ausgangspunkte der gesamten Theorie wurde. Dieser Satz findet eine Anwendung in der folgenden Lösung des bekannten Plateauschen Problems.

Unter dem Plateauschen Problem versteht man die Aufgabe, die Existenz einer solchen Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

zu beweisen, daß die entsprechende Fläche im xyz -Raume eine vorgelegte Raumkurve C enthalte; diese Fläche ist bekanntlich eine Minimalfläche, indem der von der gegebenen Raumkurve begrenzte Teil einen kleineren Flächeninhalt besitzt als der entsprechende Teil irgendeiner andern durch diese Raumkurve hindurchgehenden Fläche.

W. Blaschke 1929-ben felkérte Haart, hogy a variációszámítással kapcsolatos úttörő eredményeit foglalja össze egy előadássorozat keretében a Hamburgi Egyetemen.

Zur Variationsrechnung.

Drei Vorträge von ALFRED HAAR in Szeged (Ungarn),
gehalten im Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität
(23.—25. Juli 1929).

In der Variationsrechnung ist die Theorie derjenigen Probleme, in denen nur eine unabhängige Veränderliche auftritt, mit großer Vollkommenheit ausgebildet; damit ist auch das Vorbild zur Ausbildung der Theorie der Probleme mit mehreren unabhängigen Veränderlichen geschaffen. In einem — allerdings besonders wichtigen — Spezialfall sind auch die Probleme mit mehreren unabhängigen Veränderlichen mit großer Ausführlichkeit behandelt worden; dies ist der Fall eines quadratischen Variationsproblems, das bekanntlich auf eine lineare Differentialgleichung führt. Man besitzt — dank den bahnbrechenden Arbeiten von HILBERT und den daran anschließenden Untersuchungen — sogar mehrere Methoden, um diesen Fall zu beherrschen.

Haar A, Zur Variationsrechnung. Drei Vorträge von Alfred Haar in Szeged (Ungarn), gehalten im Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität (23.-25. Juli 1929). *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* (Hrsg. E. Artin, W. Blaschke, E. Hecke) 8. Band, 1-27 (Verlag B. G. Teubner, Leipzig, 1931)

L M Graves (1959) általánosítja a 'Haar-lemmát'.

EXTENSIONS OF THE LEMMA OF HAAR IN THE CALCULUS OF VARIATIONS

BY LAWRENCE M. GRAVES¹

Communicated by Paul R. Halmos, June 17, 1959

This note is concerned with necessary and sufficient conditions on the coefficients A_i in order that a linear functional of the form

$$(1) \quad L(v) = \int_G \sum_i A_i D^i v dx$$

shall vanish identically on a suitable class of functions v which vanish on the boundary G^* of the connected open set G in n -dimensional x -space. Here i denotes an n -dimensional vector with nonnegative integer components i_j , and

$$D^i v = \prod_{j=1}^n D_{x_j}^{i_j} v,$$

where D_{x_j} denotes partial differentiation with respect to x_j . The sum in (1) is taken over all vectors i with $0 \leq i_j \leq m_j$, where m is a fixed vector with positive integer components.

Graves L M, Extension of the lemma of Haar in the calculus of variation. *Bull. Am. Math. Soc.* 65, 319-321 (1959)

A Haar-féle invariáns mérték és integrál.

DER MASSBEGRIFF IN DER THEORIE DER KONTINUIERLICHEN GRUPPEN.*

VON ALFRED HAAR.

1. Der Ausgangspunkt der Lieschen Theorie der kontinuierlichen Gruppen, die sog. Infinitesimaltransformation, wird bekanntlich mittels eines Differentiationsprozesses gewonnen; deshalb ist die Liesche Theorie in ihrer ursprünglichen Form nur auf solche Gruppen anwendbar, welche durch solche Gleichungen dargestellt sind, die die fraglichen Differentiationsbedingungen erfüllen. Dieser Theorie steht eine andere gegenüber, die von Hurwitz in einer berühmten Arbeit¹ angebahnt wurde, welche man treffend als eine Integrationstheorie der kontinuierlichen Gruppen bezeichnet hat; diese Theorie wurde insbesondere im letzten Jahrzehnt durch eine Reihe von wichtigen Arbeiten gefördert, von denen wir hier nur die schönen Arbeiten von Schur und Weyl erwähnen.

Es liegt daher der Gedanke nahe, die Frage zu untersuchen, ob man in jeder N -gliedrigen kontinuierlichen Gruppe einen invarianten Integrationsprozeß einführen kann (für Liesche Gruppen folgt dies unmittelbar aus einer Bemerkung von Hurwitz in der angeführten Arbeit). Diese Frage ist offenbar damit gleichwertig, ob man in der Gruppenmannigfaltigkeit einen Inhalts- bzw. Maßbegriff einführen kann, der invariant gegenüber den Transformationen der Gruppe ist, d. h. der zu solchen Punktmengen der Gruppenmannigfaltigkeit, die durch irgendwelche Transformationen der Gruppe ineinander übergehen, denselben Inhalt bzw. Maß zuordnet.

In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß bei jeder N -gliedrigen kontinuierlichen Gruppe ein solcher Inhalts- bzw. Maßbegriff tatsächlich vorhanden ist. Unsere Untersuchungen gelten sogar für noch allgemeinere kontinuierliche Gruppen; wir werden im wesentlichen nur annehmen, daß die Gruppenmannigfaltigkeit metrisch, separabel und im Kleinen kompakt ist. § 1 enthält die Konstruktion des Inhaltsbegriffes; im § 2 wird gezeigt, daß dieser Begriff alle wesentlichen Eigenschaften des klassischen Inhaltsbegriffes der Euklidischen Ebene besitzt (und außerdem natürlich invariant gegenüber der Gruppe ist); auf diese Resultate gestützt, wird im § 3 das Analogon des Lebesgueschen Maßbegriffes begründet. § 4 enthält einige Anwendungen, insbesondere den invarianten Integrationsprozeß und die

* Received, July 26, 1932.

¹ Göttinger Nachrichten, 1897, S. 71—90.

Der Massbegriff in der Theorie der Kontinuierlichen Gruppen

Author(s): Alfred Haar

Source: *The Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 34, No. 1 (Jan., 1933), pp. 147-169

Published by: *Annals of Mathematics*

Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/1968346>

Accessed: 13/02/2011 03:19

Übertragung derjenigen schönen Sätze, die Peter und Weyl über die Darstellungen der geschlossenen (kompakten) Gruppen bewiesen haben².

§ 1. Der Inhalt.

2. Die Elemente einer vorgelegten N -gliedrigen Gruppe $\mathcal{G}$ deuten wir als Punkte einer N -dimensionalen Mannigfaltigkeit, die ebenfalls mit $\mathcal{G}$ bezeichnet werden soll. Zwei Eigenschaften dieser Mannigfaltigkeiten werden im folgenden insbesondere herangezogen: 1° es besitzt jeder Punkt eine Umgebung, die eindeutig, stetig abbildbar ist auf die offene Kugel des N -dimensionalen Euklidischen Raumes; und 2° die Mannigfaltigkeit selbst ist durch eine höchstens abzählbare Menge solcher Umgebungen überdeckbar. In den folgenden Untersuchungen wird (mit Rücksicht auf spätere Anwendungen) eine etwas allgemeinere Klasse von kontinuierlichen Gruppen behandelt³; wir werden nämlich nur voraussetzen, daß die Elemente der Gruppe $\mathcal{G}$ Punkte eines metrischen, separablen Raumes sind, der außerdem im Kleinen kompakt ist; die letzte Eigenschaft bedeutet bekanntlich, daß jeder Punkt eine in $\mathcal{G}$ kompakte Umgebung (d. h. eine Umgebung, deren abgeschlossene Hülle in $\mathcal{G}$ kompakt ist) besitzt. Man beachte, daß über den Zusammenhang von $\mathcal{G}$ keine Annahmen gemacht werden (so daß gewisse sog. gemischt-kontinuierliche Gruppen nicht ausgeschlossen werden), statt dessen soll nur angenommen werden, daß die Gruppenmannigfaltigkeit in sich dicht ist⁴.

Die drei Gruppenpostulate sollen in der üblichen Form zugrunde gelegt werden:

1° eine assoziative Verknüpfung, vermöge deren zu zwei beliebigen Gruppenelementen A und B ihr Produkt $C = AB$ definiert ist;

2° die Existenz des Identitätselementes E ($AE = EA = A$);

3° die Existenz der Inversen ($A^{-1}A = AA^{-1} = E$).

Daraus folgt bereits, daß (falls A ein bestimmtes Gruppenelement ist) die Transformation $X \rightarrow XA$, die irgendeinem Element X das Element XA

² Die vorliegende Arbeit ist (bis auf unwesentliche Abänderungen) die Übersetzung einer der Ungarischen Akademie der Wissenschaften in ihrer Sitzung am 18. April 1932 vorgelegten, in ungarischer Sprache verfaßten Abhandlung.

³ Über den allgemeinen Begriff der kontinuierlichen Gruppe vgl. O. Schreier, Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburg. Univ., Bd. 4 und Bd. 5; ferner E. Cartan, *Mémoires des Sciences Mathématiques*, Fasc. 42. Paris 1930.

⁴ Diese letzte Bedingung gewährleistet erst die Kontinuität der Gruppe; sie ist für das Folgende zwar nicht unerläßlich, wir wollen sie aber annehmen, um triviale Fälle auszuschließen. Die N -gliedrige kontinuierliche Gruppe erfüllt offenbar die obigen Bedingungen. — Da in der vorliegenden Arbeit die Begriffe: kompakt, offen, abgeschlossen, stets relativ zu der Gruppenmannigfaltigkeit $\mathcal{G}$ zu verstehen sind, so wollen wir der Kürze halber diese Bezeichnungen statt kompakt, offen, abgeschlossen in $\mathcal{G}$ benutzen.

33. Haar Alfréd, A folytonos csoportok elméletéről. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, Budapest 49, 287-307 (1932). [Akadémiai székfoglaló előadása.]

Zusammenfassend sind wir zu dem folgenden Satze gelangt:

II. In jeder N -gliedrigen kontinuierlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ kann man einen Inhaltsbegriff definieren, vermöge dessen zu gewissen offenen, kompakten Mengen $\mathfrak{C}$ eine positive GröÙe $I(\mathfrak{C})$ zugeordnet ist; dieser Begriff besitzt dieselben Eigenschaften, wie der Jordan-Cantorsche Inhalt der gewöhnlichen Geometrie, d. h. es gelten, falls jede der Mengen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n, \dots$ einen Inhalt besitzt, die folgenden Tatsachen:

Der Massbegriff in der Theorie der Kontinuierlichen Gruppen

Author(s): Alfred Haar

Source: *The Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 34, No. 1 (Jan., 1933), pp. 147-169

Published by: *Annals of Mathematics*

Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/1968346>

Accessed: 13/02/2011 03:19

160

A. HAAR.

ist $\mathfrak{C}_1$ kongruent $\mathfrak{C}_2$, so ist $I(\mathfrak{C}_1) = I(\mathfrak{C}_2)$;

ist $\mathfrak{C}_1$ Teilmenge von $\mathfrak{C}_2$, so ist $I(\mathfrak{C}_1) \leq I(\mathfrak{C}_2)$;

es gilt das Gesetz der Additivität:

$$I(\mathfrak{C}_1) + I(\mathfrak{C}_2) = I(\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2) + I(\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2);$$

ist (für jedes n) $\mathfrak{C}_{n+1}$ in $\mathfrak{C}_n$ enthalten, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} I(\mathfrak{C}_n) = 0$, falls die Mengen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n, \dots$ nur einen einzigen gemeinsamen Punkt haben;

ist $\mathfrak{A}$ eine beliebige offene, kompakte Menge und $\bar{\mathfrak{A}}'$ eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{A}$, so existiert eine $\bar{\mathfrak{A}}'$ enthaltende Menge $\mathfrak{C}$, deren abgeschlossene Hülle Teilmenge von $\mathfrak{A}$ ist und die einen Inhalt besitzt¹⁴;

besitzt die offene, kompakte Menge $\mathfrak{C}$ einen Inhalt, so existiert zu jeder positiven GröÙe ε eine offene Menge $\mathfrak{C}'$, deren abgeschlossene Hülle in $\mathfrak{C}$ enthalten ist ($\mathfrak{C}' < \mathfrak{C}$) von der Beschaffenheit, daß $I(\mathfrak{C}') > I(\mathfrak{C}) - \varepsilon$, sowie eine die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{C}$ enthaltende offene, kompakte Menge $\mathfrak{C}''$ ($\mathfrak{C}'' > \mathfrak{C}$) von der Beschaffenheit, daß $I(\mathfrak{C}'') < I(\mathfrak{C}) + \varepsilon$ ist¹⁵.

Unser Satz bleibt richtig, wenn die zugrunde gelegte kontinuierliche Gruppe $\mathfrak{G}$ nicht N -gliedrig, jedoch so beschaffen ist, daß ihre Elemente einen metrischen, in sich dichten, separablen und im Kleinen kompakten Raum bilden.

Haar az invariáns mértéket az invariáns tartam alapján vezette be. „Minden N -tagú G folytonos csoportban bevezethetünk egy tartalom-fogalmat, amelynek segítségével bizonyos nyílt, kompakt H halmazokhoz egy pozitív $I(H)$ mennyiséget rendelhetünk; ez a fogalom ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik mint a szokásos geometria Jordan-Cantor-féle tartalom-fogalma, vagyis ha mindegyik $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ halmaz rendelkezik tartammal, akkor a következő tények érvényesek: Ha H_1 kongruens H_2 -vel, akkor $I(H_1) = I(H_2)$; Ha H_1 részhalmaza H_2 -nek, akkor $I(H_1) < I(H_2)$; érvényes az additivitás: $I(H_1) + I(H_2) = I(H_1 + H_2) + I(H_1 H_2) \dots$ Tételünk érvényes marad, ha az alapul vett G csoport nem N -tagú, hanem úgy áll elő, hogy elemei egy metrikus, önmagában sűrű, szeparábilis és lokálisan (kicsiben) kompakt teret képeznek.” Haar e mértékkel a Lebesgue-féle integrál fogalommal analóg, igen általános integrált vezetett be.

Mathematische Probleme.

Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß
zu Paris 1900.

Von

D. Hilbert.

Wer von uns würde nicht gern den Schleier lüften, unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen auf die bevorstehenden Fortschritte unsrer Wissenschaft und in die Geheimnisse ihrer Entwicklung während der künftigen Jahrhunderte! Welche besonderen Ziele werden es sein, denen die führenden mathematischen Geister der kommenden Geschlechter nachstreben? welche neuen Methoden und neuen Thatsachen werden die neuen Jahrhunderte entdecken — auf dem weiten und reichen Felde mathematischen Denkens?

Die Geschichte lehrt die Stetigkeit der Entwicklung der Wissenschaft. Wir wissen, daß jedes Zeitalter eigene Probleme hat, die das kommende Zeitalter löst oder als unfruchtbar zur

Hilbert D, Mathematische Probleme. Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse 1900, 253-279 (1900).

Hilbert D, 5. probléma.

5. Lie's Begriff der continuirlichen Transformationsgruppe ohne die Annahme der Differenzirbarkeit der die Gruppe definirenden Functionen.

Lie hat bekanntlich mit Hinzuziehung des Begriffs der continuirlichen Transformationsgruppe ein System von Axiomen für die Geometrie aufgestellt und auf Grund seiner Theorie der Transformationsgruppen bewiesen, daß dieses System von Axiomen zum Aufbau der Geometrie hinreicht. Da Lie jedoch bei Begründung seiner Theorie stets annimmt, daß die die Gruppe definirenden Functionen differenzirt werden können, so bleibt in den Lieschen Entwicklungen unerörtert, ob die Annahme der Differenzirbarkeit bei der Frage nach den Axiomen der Geometrie thatsächlich unvermeidlich ist oder nicht vielmehr als eine Folge des Gruppenbegriffs und der übrigen geometrischen Axiome erscheint. Diese Ueberlegung, sowie auch gewisse Probleme hinsichtlich der arithmetischen Axiome legen uns die allgemeinere Frage nahe, in wie weit der Liesche Begriff der continuirlichen Transformationsgruppe auch ohne Annahme der Differenzirbarkeit der Functionen unserer Untersuchung zugänglich ist.

Bekanntlich definiert Lie die endliche continuirliche Transformationsgruppe als ein System von Transformationen

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) \quad (i = 1, \dots, n)$$

Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe.

Von

F. Peter in Karlsruhe und H. Weyl in Zürich.

§ 1.

Grundlagen. Die Orthogonalitätsrelationen.

1. *Gruppe. Volummessung in der Gruppenmannigfaltigkeit.* Es handelt sich im folgenden um die *Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe durch homogene lineare Transformationen* oder Matrizes. Innerhalb der gegebenen Gruppe $\mathcal{G}$ bedeute $\circ$ das Einheits-element. Um der Möglichkeit einer invarianten Volummessung willen werde vorausgesetzt, daß Lies infinitesimale Begriffsbildungen auf die Gruppe $\mathcal{G}$ anwendbar sind. Es sollen also die zu $\circ$ unendlich benachbarten, die infinitesimalen Elemente von $\mathcal{G}$, eine lineare, etwa r -parametrische Schar bilden. Zu einem Element a von $\mathcal{G}$ gehört die durch die Formel $s' = sa$ definierte Abbildung $s \rightarrow s'$ von $\mathcal{G}$ auf sich selbst. Bezeichnen wir sie als (rechtsseitige) *Translation*, so ist das Volummaß auf $\mathcal{G}$ durch die Forderung bestimmt, daß das Volumen den Translationen gegenüber invariant sein soll. Sind s, s' zwei unendlich benachbarte Elemente (oder „Punkte“) auf $\mathcal{G}$, so verstehen wir unter dem von s nach s' führenden Vektor das inf. Element $s's^{-1}$, bzw. dessen Komponenten relativ zu einer fest gewählten Basis der inf. Gruppe. Als *Volumen* eines parallelepipedischen Volumelementes, das von s aus durch r inf. Vektoren aufgespannt wird, ist der absolute Betrag der Determinante aus den Komponenten dieser Vektoren anzusetzen. Das Volumen eines solchen, an der

Haar invariáns mérték- és integrál fogalma segítségével Peter és Weyl csoportábrázolási módszere egy-az-egyben kiterjeszthető lokálisan kompakt csoportokra. Ezt a jelentős általánosítást használta Gleason (1952) és Montgomery és Zippin (1952) a Hilbert-féle 5. probléma megoldásához. [Lásd lentebb.]

Peter F und Weyl H, Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe. *Mathematische Annalen* 97, 737-755 (1927)

GROUPS WITHOUT SMALL SUBGROUPS

BY ANDREW M. GLEASON

(Received June 13, 1952)

A topological group is said to have small subgroups if every neighborhood of the identity contains an entire subgroup of more than one element. It is easily deduced from the structure of the one-parameter subgroups that a Lie group does not have small subgroups. The possible existence of small subgroups in a locally euclidean group has long been recognized as one of the chief difficulties involved in Hilbert's fifth problem.

Our objective is to prove that every finite dimensional locally compact group which has no small subgroups is a Lie group. This partial solution of Hilbert's fifth problem offers a new non-analytic criterion sufficient to insure that a group has an analytic structure. As such it represents a considerable step in the direction of ultimate solution of the problem. In fact, Montgomery and Zippin, using the present result inductively, have succeeded in proving the non-existence of small subgroups in locally connected groups of finite dimension. (See the following paper.) Together these results constitute an affirmative solution to Hilbert's fifth problem.

The proof depends on the construction of a suitable one-parameter semi-group of compact sets, a technique initiated by the author [3] to prove the existence of arcs. It seems unlikely that the strength of the method is now exhausted; on the contrary, there is definite hope of proving the further conjecture on the structure of locally compact groups: That every connected locally compact group is a projective limit of Lie groups.

Gleason A M, Groups without small subgroups. *Annals of Mathematics* 56, 193-212 (1952)

„...A ‘kis csoportok’ esetleges létezése a lokálisan euklideszi csoportokban egy régóta felismert fő nehézséget jelent a Hilbert-féle ötödik probléma megoldásában....
Célunk, hogy bebizonyítsuk, hogy minden olyan véges-dimenziós lokálisan kompakt csoport, amelynek nincs ‘kis csoportja’ az Lie csoport. ...
Montgomerynek és Zippinnek, az itteni eredmény induktív felhasználásával sikerült bebizonyítania a ‘kis csoportok nem-létezését lokálisan összefüggő, végesdimenziós csoportokra....”

3. The final result

3.1 THEOREM. *Let G be a locally compact group of finite topological dimension. Suppose there is a neighborhood of the identity in G which contains no entire non-trivial subgroup. Then G is a Lie group.*

PROOF. We proceed by induction on the dimension of the group. The theorem is certainly true for groups of dimension zero, for these groups either are discrete or have small subgroups. Suppose the theorem is known for groups of dimension less than n (≥ 1), and consider a connected group G of dimension n which satisfies the hypothesis of the theorem.

If the center of G is totally disconnected, then G has a non-trivial representation by linear operators on a finite dimensional vector space. Let K be the kernel of this representation. By a theorem of Montgomery [8] $\dim K < \dim G$. Clearly K satisfies all the conditions of the theorem, so the inductive hypothesis implies that K is a Lie group. The linear representation of G induces a faithful linear representation of G/K . Von Neumann [10] has shown that the existence of a faithful linear representation is sufficient to conclude that G/K is a Lie group. It follows from a theorem proved independently by Iwasawa [7] and the author [4; Theorem 3.1] that G is a Lie group.

SMALL SUBGROUPS OF FINITE-DIMENSIONAL GROUPS¹

BY DEANE MONTGOMERY AND LEO ZIPPIN

(Received March 28, 1952)

1. Introduction

A topological group is said to have no small subgroups if it has a neighborhood of the identity which contains no subgroup other than the trivial one consisting of the identity alone. The known structure of compact and of solvable groups [4, 10, 11, 12, 1, 2] indicates that the concept of "small subgroup" is of prime importance and that the analysis of the non-compact groups might well proceed in two stages: the analysis of groups with no small subgroups and the reduction of the general problem to this case. It is with the second, the "reduction-problem," that the present paper is concerned. This problem is solved in Theorem A, below. The first problem has recently been solved by A. M. Gleason. Our reduction theorem is concerned with topological groups which are locally compact, separable metric, and finite-dimensional. All the groups considered in this paper are understood to be of this class.

erty forms a natural domain for an argument by induction:

(I) G is connected and locally connected and all proper (closed) subgroups of G are generalized Lie groups (and G is finite-dimensional, locally compact, separable metric as always in this paper).

We shall now state our principal theorem:

THEOREM A. *If G satisfies (I) then G contains an invariant (closed) generalized Lie group H such that G/H satisfies (I) and G/H contains no small subgroups.*

(I) G összefüggő és lokálisan összefüggő, és minden valódi (zárt) alcsoporthja G -nek általánosított Lie-csoport.

„THEOREM A.
Ha G kielégíti az (I) feltételt, akkor G tartalmaz egy invariáns (zárt) általánosított H Lie-csoportot, úgy hogy G/H kielégíti (I)-et és G/H nem tartalmaz kis alcsoporthot.”

**Said a mathematician named Haar,
“Von Neumann can’t see very far.
He missed a great treasure —
They call it Haar measure —
Poor Johnny’s just not up to par.”**

**Egy Haar nevű matematikus azt mondja, hogy
„Neumann nem látott elég messzire,
Így elszalasztotta a kincset,
Amit Haar mértéknek hívnak.
Szegény Jancsi, nem ütötte meg a mértéket.”**

Haar Alfréd legnagyobb eredményei közé tartozik a később róla elnevezett mérték fogalma. Eleinte azonban, Neumann megpróbálta Haart elkedvetleníteni, azzal, hogy érzése szerint ilyen mérték nem létezhet. A következő versike Haar eredményét ünnepli.

This ‘nasty’ limerick may refer to the fact that von Neumann discouraged Haar concerning the existence of that general measure which Haar soon discovered. Neumann derived a much less general measure on the spaces of almost periodic functions. Anyway, Neumann and Haar seem to have often discussed these questions. But Haar would have never said such a thing about Neumann. ...

„12. J. v. Neumann und F. Rieß (denen ich ein vorläufiges Manuskript der vorangehenden Untersuchungen übergeben habe) verdanke ich die interessante Bemerkung, daß man den Maßbegriff mit Hilfe der Caratheodory-schen Theorie der Maßfunktionen direkt aus den Ergebnissen des § 1 herleiten kann, ohne den Inhaltsbegriff zu entwickeln. Man kann dabei - nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn J. v. Neumann - wie folgt verfahren:”

33. Haar Alfréd, A folytonos csoportok elméletéről. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, Budapest 49, 287-307 (1932). [Akadémiai székfoglaló előadása.]

34. Der Maßbegriff in der Theorie der Kontinuierlichen Gruppen. *Annals of Mathematics* (2) 34, 147-169 (1933) (The concept of measure in the theory of continuous groups.)

“Nicolas Bourbaki”

Using this whimsical pseudonym, derived from the name of a general in the Franco-Prussian War, a group of young French mathematicians has written 20 volumes of an extraordinary treatise on mathematics

by Paul R. Halmos

His name is Greek, his nationality is French and his history is curious. He is one of the most influential mathematicians of the 20th century. The legends about him are

maticians in Berkeley and in Göttingen who think that his influence is pernicious. He has emotional partisans and vociferous detractors wherever groups of mathematicians congregate. The

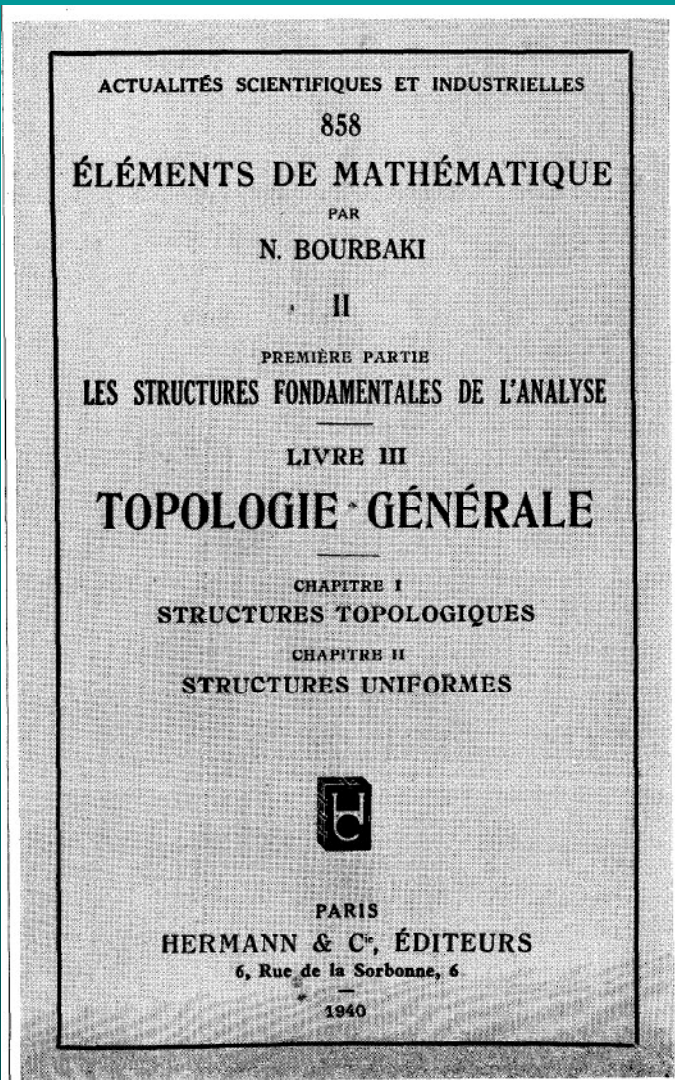
mous society,” is quite apt here.) The pseudonymous group is writing a comprehensive treatise on mathematics, starting with the most general basic principles and to conclude, presumably,



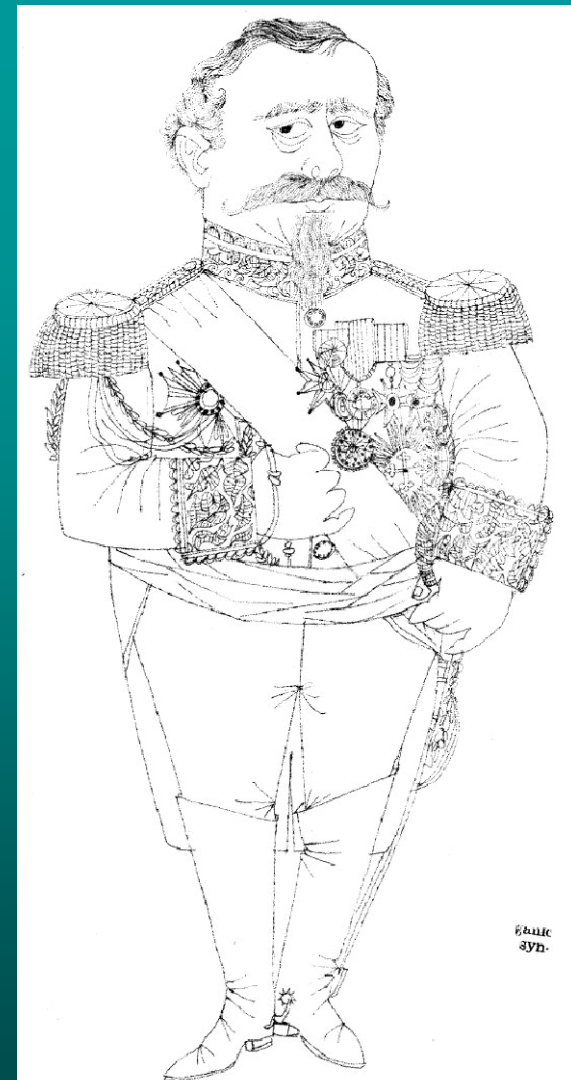
NICOLAS BOURBAKI is fancifully represented by this milling throng of French mathematicians. Bourbaki appears to consist of

10 to 20 men at any one time. Any resemblance between these men and the individuals in the drawing is entirely coincidental.

Halmos P, „Nicolas Bourbaki”. *Scientific American* 196, 88 – 99 (1957).



PAPER-BACKED BOOK, of which this is both the title page and the cover, is only a part of Book III of Part I of the Bourbaki treatise. Book III is entitled *General Topology*.



GENERAL BOURBAKI, whose name was not Nicolas but Charles Denis Sauter, is depicted in this drawing based on an engraving. He was once offered the crown of Greece.

Halmos P, „Nicolas Bourbaki”. *Scientific American* 196, 88 – 99 (1957).

ON THE THEORY OF POTENTIALS IN LOCALLY COMPACT SPACES

BY

BENT FUGLEDE

Copenhagen

Introduction

Chapter I. Basic co

1. Measures on

2. Kernel, pote

Chapter II. The cas

3. The strong t

4. The interior

5. Extensions

I. BASIC CONCEPTS OF POTENTIAL THEORY

1. Measures on locally compact spaces

The distributions of mass (or charge) to be considered in the present study are those which can be interpreted mathematically as real-valued *measures*, in particular positive measures. Referring to N. Bourbaki [4], [5] for an exposition of the theory of measures and integration on a locally compact Hausdorff space, we limit ourselves to listing (in § 1.1) those concepts which are especially relevant in potential theory, and to stating (in § 1.2) some further necessary results. As to the terminology and notations we generally follow Bourbaki.⁽¹⁾

⁽¹⁾ Certain exceptions from this convention will be listed here. Our locally compact (Hausdorff) space is denoted by X , and the class of all continuous functions on X by $C = C(X)$. (When speaking of a continuous function, we generally understand that the values are *finite* real numbers. A lower semi-continuous function is allowed to take the value $+\infty$, but not $-\infty$.) The class of all continuous functions of compact support is denoted by $C_0 = C_0(X)$. For any class $\mathcal{F}$ of functions, $\mathcal{F}^+$ denotes

FUNCTIONS ON LOCALLY COMPACT GROUPS

GEORGE W. MACKEY¹

I. INTRODUCTION

1. **Background.** The subject of this address is a branch of mathematics which may be regarded as a combination of the classical theory of representations of finite groups by matrices and that part of analysis centering around the theory

The connection between these two aspects is simply enough from the fact that the numbers modulo 2π form groups under addition.

In one form of the theory of representations a central role is played by the so-called dual group. This is usually defined as the set of all

UNITARY REPRESENTATIONS OF GROUP EXTENSIONS. I

BY

GEORGE W. MACKEY⁽¹⁾

Harvard University

Introduction

Let $\mathcal{G}$ be a separable locally compact group. Continuing the convention adopted in our papers [11] and [12] we shall abbreviate the term "continuous unitary representation of $\mathcal{G}$ " to "representation of $\mathcal{G}$ ". If $\mathcal{K}$ is a proper closed subgroup of $\mathcal{G}$ whose representations are in a suitable sense "all known" one may pose the following two questions. (a) Which representations of $\mathcal{K}$ are the restrictions to it of irreducible representations of $\mathcal{G}$? (b) Given such a representation of $\mathcal{K}$ how can one construct all irreducible representations of $\mathcal{G}$ of which it is the restriction? When $\mathcal{K}$ is the identity subgroup question (a) has a trivial answer (apart from questions of dimension) and question (b) is essentially the same as that of determining all irreducible representations of $\mathcal{G}$? However, for other choices of $\mathcal{K}$, questions (a) and (b) can furnish a useful breakdown of the problem of determining all

Mackey G W, Functions on locally compact groups. *Bull. Am. Math. Soc.* 56, 385-412 (1950).

Mackey G W, Unitary representations of group extensions I. *Acta Mathematica* 99, 265-311 (1952).

On the Localizability of Quantum Mechanical Systems*

A. S. WIGHTMAN

Princeton University, Princeton, New Jersey

1. INTRODUCTION

FROM the very beginning of quantum mechanics, the notion of the position of a particle has been much discussed. In the nonrelativistic case, the proof of the equivalence of matrix and wave mechanics, the discovery of the uncertainty relations, and the development of the statistical interpretation of the theory led to an understanding which, within the

inevitable limitations of the nonrelativistic theory, may be regarded as completely satisfactory.

Historically, confusion reigned in the relativistic case, because situations requiring a description in terms of many particles were squeezed into a formalism built to describe a single particle. I have in mind the difficulties with wave functions for a single particle which seem to yield nonzero probability for finding it in a state of negative energy. Soon attention shifted to the problems of the quantum theory of fields and the question of the status of position

* Dedicated to Eugene Wigner on his sixtieth birthday.

„From a mathematical point of view, the present paper merely writes out Mackey's theory in detail for the case of the Euclidean group.”

Wightman, On the localizability of quantum mechanical systems. *Rev. Mod. Phys.* 34, 265 – 311 (1962).

Relative entropy, Haar measures and relativistic canonical velocity distributions

Jörn Dunkel¹, Peter Talkner and Peter Hänggi

Institut für Physik, Universität Augsburg, Theoretische Physik I,
Universitätsstraße 1, D-86135 Augsburg, Germany
E-mail: joern.dunkel@physik.uni-augsburg.de

New Journal of Physics **9** (2007) 144

Received 8 March 2007

Published 22 May 2007

Online at <http://www.njp.org/>

doi:10.1088/1367-2630/9/5/144

Abstract. The thermodynamic maximum principle for the Boltzmann–Shannon (BGS) entropy is reconsidered by combining elements from group measure theory. Our analysis starts by noting that the BGS entropy is a special case of relative entropy. The latter characterizes probability distributions with respect to a pre-specified reference measure. To identify the canonical BGS entropy with a relative entropy is appealing for two reasons: (i) the maximum entropy principle assumes a coordinate invariant form and (ii) thermodynamic equilibrium distributions, which are obtained as solutions of the maximum entropy principle, may be characterized in terms of the transformation properties of the underlying reference measure (e.g. invariance under group transformations). As examples we analyse two frequently considered candidates for the one-particle equilibrium velocity distribution of an ideal gas of relativistic particles. It becomes evident that the standard Jüttner distribution is related to the (additive) translation on momentum space. Alternatively, imposing Lorentz invariance of the reference measure leads to a so-called modified Jüttner function, which differs from the standard Jüttner distribution by a prefactor, proportional to the inverse particle energy.

Egy illusztráció
napjainkból a Haar-
mérték felhasználására
relativisztikus
statisztikus fizikában.

1. Introduction

The combination of variational principles and group symmetries has proven extremely fruitful in various fields of theoretical physics over the past century, with applications ranging from classical mechanics [1, 2] to quantum field theory [3]–[5]. In this paper, we would like to discuss how group and measure theoretical concepts may be incorporated into the maximum entropy principle (MEP) of canonical equilibrium thermostatics [6].² To this end, we follow up an idea by Ochs [7, 8] who demonstrated that the canonical Boltzmann–Shannon–Gibbs (BGS) entropy is a special case of *relative entropy* (section 2). The relative entropy [9]–[11] characterizes a probability distribution with respect to a pre-specified reference measure and allows a manifestly coordinate invariant formulation of the MEP. In particular, we will focus on how the choice of the reference measure affects the solution of the entropy maximization problem (i.e. the equilibrium distribution). Thereby, it will be clarified that an acceptable MEP must include a postulate that determines which specific reference measure has to be used for a given class of physical systems. To obtain a mathematically meaningful characterization of potential reference measures, one can study their symmetry properties by means of their transformation behaviour under group actions. The idea of combining measure and group theory goes back to the Hungarian mathematician Alfred Haar [12]. In the second part of the paper, this approach will be pursued in order to analyse the MEPs for two of the most frequently discussed candidates for the relativistic one-particle equilibrium velocity distribution (section 3).

2. Thermodynamic entropy, relative entropy and Haar measures

We start out by summarizing the standard formulation of the canonical MEP in section 2.1. We shall focus on the simplest paradigm, corresponding to a spatially homogeneous, ideal gas of classical particles, as this is sufficient for illustrating the main ideas. The concept of relative

² The MEP states that the thermodynamic equilibrium distribution can be obtained by maximizing a suitably chosen entropy functional under a given set of constraints.

Köszönetnyilvánítás. Hálásan köszönöm Méreg Zsuzsa és Szabó Emese (Wigner-Könyvtár) és Varga Piroska (Bolyai-Könyvtár), Varga Erika (SZTE, Elméleti Fizikai Intézet) segítségét a szükséges forrásmunkák megtalálásában és megszerzésében. Köszönöm Zomboryné Bazsó Rozáliának, az Országos Evengélikus Levéltár munkatársának a segítségét. A második dián látható másolat eredeti fényképről készült, amelyet Benedict Mihály professzor Úrtól kaptam, köszönet érte.

Acknowledgments.

This work has been supported by the Hungarian Academy of Sciences, by the National Scientific Research Foundation OTKA, Grant No. K 104260, and, partially by the ELI-ALPS project . The ELI-ALPS project (GOP-1.1.1-12/B-2012-0001) is supported by the European Union and co-financed by the European Regional Development Fund.

Függelékek

**Haar's 'surroundings' and his role in
mathematics in the first third of the XX century
[Some history. Farkas and Riesz. World War I...]**

The Riesz-Fischer Theorem [1907]. [Summable sequences and integrable functions]

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions.*

Note ⁽¹⁾ de M. **FRÉDÉRIC RIESZ**, présentée par M. Émile Picard.

Pour la résolution de certaines équations fonctionnelles, du type de l'équation bien connue de Fredholm, M. Hilbert a indiqué une méthode générale⁽²⁾; cette méthode consiste à rattacher la résolution de ces équations fonctionnelles à la résolution d'un système infini d'équations linéaires

⁽¹⁾ Présentée dans la séance du 11 mars 1907.

⁽²⁾ *Göth. Nachr.*, 1906, p. 157 et 439.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la convergence en moyenne.* Note ⁽¹⁾

de M. **ERNST FISCHER**, présentée par M. Émile Picard.

Le 11 mars, M. Riesz a présenté à l'Académie une Note sur les systèmes orthogonaux de fonctions (*Comptes rendus*, 18 mars 1907). J'étais arrivé au même résultat et je l'ai démontré dans une conférence faite à la Société mathématique à Brunn, déjà le 5 mars. Ainsi mon indépendance est évidente, mais la priorité de la publication revient à M. Riesz. Je me permets

$a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \dots$ unique, caractéristique du nombre J , et qui ne peut être illimité que si J est irrationnel.

⁽¹⁾ Présentée dans la séance du 29 avril 1907.

Riesz F, *Comptes rendus* 18 mars, pp 615-619 (1907) [„Présentée dans la scéance du 11 mars 1907”]

Fischer E, *Comptes rendus* 13 mai, pp 1022-1024 (1907) [„Présentée dans la scéance du 29 avril 1907”]

The Riesz–Fischer theorem [1907]. [Correspondence (equivalence) of Heisenberg's matrix mechanics and Schrödinger's wave mechanics.]

A sequence $\{f_n\}$ of the elements of the function space L^2 converges („en moyenne”) to some element f of L^2 , if and only if, for $m, n \rightarrow \infty$ the norm of the differences $\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$. [This is essentially an analogon of the Cauchy condition for complex numerical sequences.]

For orthogonal systems:

If $\{\phi_k(x)\}$ is an orthonormal system in the space L^2 of the square-integrable functions on a set Ω , then for every sequence of complex numbers $c_1, c_2, c_3, \dots$, for which

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$$

then there exists one and only one element $f(x)$ of the space L^2 whose Fourier coefficients with respect to the system $\{\phi_k(x)\}$ are just these numbers, i.e. it is the solution of the system of equations

$$(\phi_k, f) = c_k$$

convergence „en moyenne”:

and the solution is given by the series:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x)$$

$$\int_{\Omega} dx \left| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \phi_k(x) \right|^2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(and the Parseval formula holds)

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(\phi_k, f)|^2$$

Two doctorants of Hilbert: Erhard Schmidt [1905]; Alfréd Haar [1909]

Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen.

I. Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen
vorgeschriebener.*)

Von

ERHARD SCHMIDT in Bonn.

) Dieser Teil ist bis auf das neu hinzugekommene IV Kapitel, den § 13 und unwesentliche Änderungen in den übrigen Kapiteln ein Abdruck meiner im Juli 1905 erschienenen Göttinger Inauguraldissertation.

**) *Acta Mathematica* Bd. 27.

Schmidt E, *Mathematische Annalen* 63, 433-476 (1907); 64, 161-174 (1907); 65, 370-399 (1908);...

Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme.*)

(Erste Mitteilung.)

Von

ALFRED HAAR in Göttingen.

*) Die vorliegende Arbeit ist, bis auf unwesentliche Änderungen, ein Abdruck meiner im Juli 1909 erschienenen Göttinger Inauguraldissertation.

Haar A, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Erste Mitteilung). *Mathematische Annalen* 69, 331-371 (1910). [2c] Haar A, Zweite Mitteilung; *ibid.* 71, 38-53 (1911);...

Recent use of the original Schmidt decomposition, e.g.: Fedorov M V and Miklin N I, Schmidt modes and entanglement. *Contemporary Physics* 55, 94-109 (2014)

Schmidt modes and entanglement

M.V. Fedorov^{a*} and N.I. Miklin^b

^a*A.M. Prokhorov General Physics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;* ^b*Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russia*

(Received 25 September 2013; accepted 7 December 2013)

Motivated by their frequent use in quantum mechanical studies of entanglement, we give a brief overview of Schmidt modes and Schmidt decompositions of two-particle wave functions. We discuss methods of their derivation and include a little-known approach used in the original work by E. Schmidt [Math. Annalen, 63 (1906), 433]. This employs the bipartite wave function itself rather than the more complicated two-party reduced density matrix. As an illustration, Schmidt modes for two-photon polarisation qutrits are derived in a general form. The derivation is accompanied by a series of simple examples with special choices of parameters. Relationships between Schmidt modes, polarisation Stokes vectors and entanglement are also discussed.

Keywords: Schmidt decomposition; entanglement; biphoton; qutrits; Stokes vectors

„The Schmidt-mode analysis gives an additional vision of the origin of entanglement and evaluation of its degree. The Schmidt decompositions of bipartite wave functions can be used in practical application as a method for encoding and transmission of information. All these aspects of the Schmidt-mode analysis will be surveyed in the following sections of this paper. Special attention will be paid to the methods of Schmidt-mode derivation. As will be shown, the method providing the most complete derivation is based on the ideas of the original work by E. Schmidt [10], and it differs from the traditionally used approach.”

See further works, e.g.: M.V. Fedorov, M.A. Efremov, P.A. Volkov, and J.H. Eberly, *Short-pulse or strong-field breakup processes: a route to study entangled wave packets*, *J. Phys. B:At.Mol.Opt.Phys.* 9 (2006), pp. S467–S483.

M.V. Fedorov, M.A. Efremov, A.E. Kazakov, K.W. Chan, C.K. Law, and J.H. Eberly, *Packet narrowing and quantum entanglement in photoionization and photodissociation*, *Phys. Rev. A* 69 (2004), 052117(10).

X.-F. Qian and J.H. Eberly, *Entanglement and classical polarization states*, *Opt. Lett.* 36 (2011), pp. 4110–4112.

Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen.

Von

ERNST HELLINGER in Marburg a. d. L. und OTTO TOEPLITZ in Göttingen.

Inhaltsübersicht.

	Seite
Einleitung.	289

Erstes Kapitel.

§ 1. Die Konvergenz der beschränkten Linearformen	293
§ 2. Die Konvergenz der beschränkten Bilinearformen	295
§ 3. Die Hilbertschen Faltungssätze	299
§ 4. Beschränkte quadratische Formen, beschränkte Bilinearformen mit komplexen Koeffizienten, beschränkte Hermitesche Formen.	308
§ 5. Kriterien der Beschränktheit	306
§ 6. Kalkül mit beschränkten Matrizen (Bilinearformen)	309
§ 7. Formalsätze über reziproke Formen	311
§ 8. Klassifikation der Probleme	313

Hellinger E and Toeplitz O, Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen. *Mathematische Annalen* 69, 289 – 330 (1910).

Neumann's fight with the spectral representation of unbounded hermitian operators.

„The question naturally arises whether all symmetric transformation – in analogy with the case of bounded transformation – have a spectral resolution or not ? ... **ERHARD SCHMIDT was the first who realized that if we want to have an analogous spectral decomposition, then we have to restrict ourselves to the study of self-adjoint transformations*** [see Neumann's notes in [1]].” ...

Theorem: Any self-adjoint transformation can be written in the form,

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}$$

where $\{E_{\lambda}\}$ is a spectral set, uniquely determined by A ; moreover E_{λ} commutes with A , and with any bounded transformation which commutes with A .”

Riesz Frigyes – Szőkefalvi-Nagy Béla, *Funkcionálanalízis* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1988). Section 120. Spectral resolution of self-adjoint transformations. [based on: *Lecons d'Analyse fonctionelle*, 4. éd. (Gauthier-Villars, Paris; Akadémia Kiadó, Budapest, 1965)]

reellen H. O. so nicht beizukommen. — Der Verfasser möchte es nicht versäumen, Herrn E. Schmidt an dieser Stelle seinen Dank für das Interesse auszusprechen, das er diesen Untersuchungen (insbesondere der Übertragung der Resultate auf nicht-reelle H. O.) zugewandt hat, und darauf hinweisen, daß er wiederholt wesentliche Anregungen aus Gesprächen mit ihm empfangt. Insbesondere stammt der Begriff der „Hypermaximalität“ von H. O. (vgl. Def. 9), sowie die Erkenntnis, daß diese Eigenschaft für die Existenz der Z. d. E. notwendig und hinreichend ist, von E. Schmidt.

[1] von Neumann J, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. in: *Mathematische Annalen* – 102, 49 – 131 (1929). Footnote 23 on page 62.

Lineáris egyenlőtlenségek.

[Mechanika, Matematika és Optimalizáláselmélet.]

Lineáris egyenlőtlenségek. Farkas Gyula [1895,...,1901] és Haar Alfréd [1918,...,1924]

A LINEÁRIS EGYENLŐTLENSÉGEKRŐL.

HAAR ALFRÉD-től.

A lineáris egyenlőtlenségek elmélete FARKAS GYULÁ-tól¹ és MINKOWSKI HERMANN-tól² ered. Egymástól függetlenül és különböző utakon jutottak el az elmélet két főtételehez: a lineáris egyenlőtlenségek alaptételéhez és azok parameteres megoldásához.

A jelen dolgozat első célja ezeket az eredményeket más módon levezetni. A többdimenziós tér geometriájának egyszerű tételei azok, a melyekre a fent említett tételek visszavezethetők, ha a határozatlanokat s ezekkel együtt a közöttük fennálló egyenlőtlenségeket célszerű módon geometriailag interpretáljuk. A kérdéses geometriai tételek a convex testek tulajdonságairól szólnak;³ az erre vonatkozó legegyszerűbb megállapításokon

¹ «A FOURIER-féle mechanikai elv alkalmazásai.» (Mathematikai és Természettudományi Értesítő, XII. k. 1895.) «A FOURIER-féle mechanikai elv alkalmazásának algebrai alapjáról.» (Mathematikai és Fizikai Lapok, V. k. 1896.) «Paraméteres módszer FOURIER mechanikai elvéhez.» (Mathematikai és Fizikai Lapok, VII. k. 1898.) «Theorie der einfachen Ungleichungen.» (Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 124. 1901.)

² «Geometrie der Zahlen.» 39—45. oldal.

Farkas Gy, Theorie der einfache Ungleichungen. *Journal für reine und angew. Math.* 124, 1-27 (1901)

Haar A, A lineáris egyenlőtlenségekről. *Mat. Term. Ért.*, 36, 179-196 (1918); Über lineare Ungleichungen. *Acta Sci. Math.*, 2, 1-14 (1924)

Lineáris egyenlőtlenségek. Haar Alfréd általánosította Farkas Gy és Minkowski H alaptételeit.

280

HAAR ALFRÉD.

kivül egy CARATHÉODORY-tól eredő szép tétel nyer e dolgozatban alkalmazást.¹

Ennek a geometriai módszernek alkalmazásával egyrészt igen egyszerű módon adódnak a régi FARKAS-MINKOWSKI-féle tételek, másrészt ezek a tételek új eredményekkel egészülnek ki.

1. §. A homogen linearis egyenlőtlenségek alaptétele.

Vizsgálataink kiinduló pontjául az $u_1, u_2, \dots, u_n$ határozatlanok között fennálló homogen linearis egyenlőtlenségek valamely rendszerét választjuk:

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \dots, u_n) \equiv a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \dots + a_{kn}u_n \geq 0. \quad (k=1, 2, \dots)$$

Rendszerünk véges számú vagy végtelen sok ilyen egyenlőtlenségből áll; az utóbbi esetben azonban feltételezzük, hogy rendszerünk

Farkas Gy, Theorie der einfache Ungleichungen. *Journal für reine und angewandte Math.* 124, (1901)

Haar A, A lineáris egyenlőtlenségekről. *Mat. Term. Ért.*, 36, 179-196 (1918); Über lineare Ungleichungen. *Acta Sci. Math.*, 2, 1-14 (1924)

Lineáris egyenlőtlenségek. Farkas Gyula [1895,...,1901] és Haar Alfréd [1918,...,1924]

Theorie der einfachen Ungleichungen.

(Von Herrn *Julius Farkas* in Kolozsvár (Klausenburg).)

Die naturgemässe und zugleich systematische Behandlung der analytischen Mechanik muss das zuerst von *Fourier**) und dann später von *Gauss***) formulierte Ungleichheitsprincip der virtuellen Verschiebungen zur Grundlage haben.

Die Möglichkeit einer solchen Behandlung erfordert aber gewisse Kenntnisse über die homogenen linearen ganzen Ungleichungen, welche bisher so zu sagen gänzlich gefehlt haben.

Fourier hat sich selbst vielfach um Ungleichungen bemüht***), aber ohne erheblichen Erfolg. Später befasste sich der russische Mathematiker *Ostrogradsky* mit diesem Gegenstande.†) Seine Betrachtungen passen aber nur auf den Fall, dass die Anzahl der Ungleichungen, welche zum Ausdrucke des mechanischen Zwanges dienen, diejenige der Componenten der virtuellen Verschiebungen nicht übertrifft. Andere Publicationen, welche über dieses Thema noch erschienen sind, zeigen auch keinen wesentlichen Fortschritt.

*) „Sur la Statique“. I. de l'Éc. polyt. II. An VI. (1798). Oeuvres, Tome II, pp. 477—521. 1890.

**) „Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik“. Dieses Journal, IV. 1829. Werke V. 1877.

„Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrü“. Comm. soc. reg. scient. Gotting. rec. Vol. VII. 1830. Werke V. 1877.

***) Oeuvres, Tome II. pp. 317—328. 1890. (1823, 1824).

†) „Considérations générales sur les momens des forces“. Mém. de l'Ac. imp. des Sc. de St. Pétersbourg 1834.

Farkas' lemma (1894). [It turned out later that Farkas's lemma is at the core of linear optimization theory.] Alfred Haar generalized the Farkas lemma for the inhomogeneous case.

Let A be an $m \times n$ matrix, and $b \in R^m$. Then either

a) There is an $x \in R^n$ such that $Ax \leq b$; or

b) There is an $y \in R^m$ such that $yA = 0$ and $yb < 0$.

The virtual displacements satisfy certain inequalities, which were derived by Farkas in 1894. See his later works published in German:

Farkas Gy, Theorie der einfache Ungleichungen. *Journal für reine und angew. Math.* 124, 1-27 (1901).

Farkas Gy, Beiträge zu den Grundlagen der analytischen Mechanik. Farkas (Julius=Gyula) in: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* – 131,165 – 201 (1906).

Garg A and Mermin N D, Farkas's lemma and the nature of reality: Statistical implications of quantum correlations. *Foundations of Physics* 14, 1-39 (1984)

Farkas's Lemma and the Nature of Reality: Statistical Implications of Quantum Correlations

Anupam Garg¹ and N. D. Mermin¹

Received December 16, 1982

A general algorithm is given for determining whether or not a given set of pair distributions allows for the construction of all the members of a specified set of higher-order distributions which return the given pair distributions as marginals. This mathematical question underlies studies of quantum correlation experiments such as those of Bell or of Clauser and Horne, or their higher-spin generalizations. The algorithm permits the analysis of rather intricate versions of such problems, in a form readily adaptable to the computer. The general procedure is illustrated by simple derivations of the results of Mermin and Schwarz for the symmetric spin-1 and spin-3/2 Einstein-Podolsky-Rosen problems. It is also used to extend those results to the spin-2 and spin-5/2 cases, providing further evidence that the range of strange quantum theoretic correlations does not diminish with increasing s . The algorithm is also illustrated by giving an alternative derivation of some recent results on the necessity and sufficiency of the Clauser-Horne conditions. The mathematical formulation of the algorithm is given in general terms without specific reference to the quantum theoretic applications.

1. INTRODUCTION

Given N random variables with distributions p_i , $i = 1, \dots, N$, there is always at least one N th order distribution P that returns the given distributions as marginals, namely the uncorrelated product distribution $P = \prod_i p_i$. If, however, we are given not only the first-order distributions but also some of the pair distributions p_{ij} , then the problem of finding any higher-order

(discussion of the Bell, Clauser-Horne inequalities in terms of Farkas's homogeneous inequality lemma)

Section 2 can skip directly to Section 4, after noting the special features of the illustrative distributions described in Section 3.2. Readers interested in the physical significance of the problems solved in Section 4, rather than the method of solution, can limit their attention to Section 4.3, where some implications of the solutions for the transition from quantum to classical behavior are pointed out.

2. FARKAS'S LEMMA AND THE STATISTICAL PROBLEM

2.1. General Formulation of the Problem

Consider N discrete random variables, the i th of which has a domain containing n_i values and a distribution p_i assigning probabilities to each of those values. In addition to the distributions p_i , we are given a set S_2 of pair distributions p_{ij} for some, but not necessarily all, pairs of the variables. Each of the N variables occurs in at least one of the pair distributions in S_2 , so that all of the statistical information is contained in the pair distributions, from which the p_i can be recovered as marginals. For the given pair distributions we wish to know whether it is possible to construct all of a specified set S of third or higher-order distributions, $P_{ijk} \dots$, that meet the following conditions:

(a) *Compatibility.* The two-variable marginals of the higher-order distributions agree with the specified pair distributions in S_2 whenever they can be compared. Thus if p_{ij} is in S_2 and the i th and j th variables are among the variables of $P_{rst\dots}$ in S , then the sum of $P_{rst\dots}$ over all its variables except the i th and j th must be p_{ij} :

$$\sum' P_{rst\dots} = p_{ij} \quad (1)$$

(b) *Consistency.* If any two of the higher-order distributions in S have q of their variables in common, then the q th order distributions obtained by summing each P over its remaining variables must be the same. For example, if P_{ijk} and P_{ijl} are in S , then we require

$$\sum' P_{ijk} = \sum' P_{ijl} \quad (2)$$

where the i th and j th variables are excluded from the sums. Consistency in this case is not in general implied by compatibility, since p_{ij} need not be a member of the set S_2 of specified pair distributions.

(c) *Non-negativity.* None of the higher-order distributions in S can be negative for any values of their arguments.

Lineáris egyenlőtlenségek. Farkas Gyula [1895,...,1901] és Haar Alfréd [1918,...,1924]

Farkas Gyula élete és munkássága



Szerkesztette Martinás Katalin
Eötvös Loránd Fizikai Társulat
Termodinamikai Szakcsoportja
Budapest

2003

PRÉKOPA ANDRÁS:
FARKAS GYULA ÉLETE ÉS MUNKÁSSÁGÁNAK JELENTŐSÉGE AZ
OPTIMALIZÁLÁS ELMÉLETÉBEN

Kivonat. Százötven évvel ezelőtt született Farkas Gyula a nagy magyar matematikus és elméleti fizikus. Ebben a dolgozatban áttekintjük életútját és a lineáris egyenlőtlenségekkel, illetve a mechanikai rendszerek egyensúlyi állapotának feltételével kapcsolatos munkásságát. Idevágó eredményei a modern optimalizáláselmélet kialakulásában játszottak alapvető szerepet.

ehhez szükséges szakirodalmi búvárkodás során kezembe kerültek Farkas Gyulának azok a munkái is, amelyekben ő maga felhasználja a lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó alaptételét. Ezek egy része a mechanikai egyensúly szükséges feltételével foglalkozik. Meglepetve láttam, hogy a mechanikai egyensúly feladata, legalábbis akkor, ha az erőternek van potenciálja, lényegében azonos a nemlineáris programozás alapfeladatával. Ilyenformán Farkas Gyula lényegében ugyanarra a célra alkotta meg a lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó tételét, mint amilyen célra azt Kuhn és Tucker felhasználta 1950-ben.

Farkas Gyula tehát egyfelől megalkotta a lineáris egyenlőtlenségek alaptételét (és egyéb idevágó alapvető eredményeket is elért), másfelől megalkotta a nemlineáris programozás legfontosabb tételét, az elméleti fizikai problematika keretein belül. Jóllehet Farkas egy fizikai tételt fogalmazott meg és bizonyított, gondolatmenete érvényes a mechanikától elvonatkoztatott, egyenlőtlen-séges kényszerfeltételek melletti optimalizálásra, vagyis a nemlineáris programozás alapfeladatára.

Lineáris egyenlőtlenségek. A 'Haar lemma' szerepe lineáris rendszerek automataikus kontrolljában, és Markov-láncokhoz viszonyított sztochasztikus összehasonlításban.

KYBERNETIKA — VOLUME 43 (2007), NUMBER 3, PAGES 369 – 391

IDEMPOTENT VERSIONS OF HAAR'S LEMMA: LINKS BETWEEN COMPARISON OF DISCRETE EVENT SYSTEMS WITH DIFFERENT STATE SPACES AND CONTROL

MOURAD AHMANE AND LAURENT TRUFFET

Haar's Lemma (1918) deals with the algebraic characterization of the inclusion of polyhedral sets. This Lemma has been involved many times in automatic control of linear dynamical systems via positive invariance of polyhedrons. More recently, it has been used to characterize stochastic comparison w.r.t. linear/integral ordering of Markov (reward) chains.

Result 1. (Lemma of Haar) Let P (resp. Q) be an $m \times d$ (resp. $m' \times d$) matrix. Let p (resp. q) be a m (resp. m') dimensional column vector. The following assertion

$$\emptyset \neq \{x \in \mathbb{R}^d : Px \leq_m p\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : Qx \leq_{m'} q\},$$

is true if and only if (iff) there exists an $m' \times m$ matrix H which entries are non-negative and such that the following conditions hold:

$$(i) \quad Q = HP, \quad (ii) \quad Hp \leq_{m'} q.$$

In the case where p and q are equal to the null vector (i.e. the homogeneous case), Haar's Lemma reduces to Farkas' lemma [16]. A recent reference for such material is [22, p. 58–61]. Recall that Haar's Lemma has been involved many times in automatic control of linear dynamical systems when the constraint domains (state and/or control) are polyhedrons (see e.g. [21, 29]).

From Haar's Lemma, we deduce our main reference result dealing with the inclusion of polyhedrons included in the non-negative orthant.

Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 49., Budapest, Hungary, 1985. Szabados J and Tandori K (editors), *Alfréd Haar Memorial Conference* Vols. I-II. (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1987)

COLLOQUIA MATHEMATICA
SOCIETATIS JÁNOS BOLYAI, 49

A. HAAR
MEMORIAL CONFERENCE

Edited by

J. SZABADOS and K. TANDORI

VOL. I.

Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 49.,
Budapest, Hungary, 1985. Szabados J and Tandori
K (editors), *Alfréd Haar Memorial Conference* Vols. I
- II. (North-Holland Publishing Company,
Amsterdam, 1987)



NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY
AMSTERDAM-OXFORD-NEW YORK

MTAK

