

# Kevert állapotú anholonómiák vizsgálata

Bucz Gábor

Témavezető: Dr. Fehér László  
Dr. Lévay Péter

Szeged, 2015.04.23.

- Motiváció - Holonómia
- Tiszta és kevert állapotok geometriája
- Két qubit problémakör
- Saját munka

- Csigalépcsőn mozgás
- Macska esése
- Autó parkolása
- Mennyiségek parallel translációja

# Két részrendszeres összefonódás

## Állapotok kifejtése

- $|\Psi\rangle = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{a=1}^M W_{a\alpha} |a\rangle \otimes |\alpha\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ ,  
 $\dim \mathcal{H}_1 = N, \dim \mathcal{H}_2 = M$
- Redukált sűrűségmátrix:  
 $\varrho_1 = WW^\dagger \in M_{N \times N}(\mathbb{C}), \quad \overline{\varrho_2} = W^\dagger W \in M_{M \times M}(\mathbb{C})$
- Szeparálható állapot:  $\varrho_1^2 = \varrho_1, \varrho_2^2 = \varrho_2$
- Összefonódott állapot:  $\varrho_1^2 \neq \varrho_1, \varrho_2^2 \neq \varrho_2$

# Két részrendszeres összefonódás

Schmidt tétele, purifikáció, redukció

- **Schmidt dekompozíciós tétele:**

Minden tiszta állapot a  $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  térben kifejezhető a  $|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle$  alakban, ahol  $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^N$  onb.  $\mathcal{H}_1$ -en,  $\{|f_i\rangle\}_{i=1}^M$  onb.  $\mathcal{H}_2$ -n,  $n = \min\{N, M\}$ .

- Adott  $|\Psi\rangle$  tiszta állapot redukált sűrűségmátrixainak a spektruma megegyezik a nulla sajátértékek multiplicitásától eltekintve.
- Adott  $\varrho_1 \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1^*$  kevert állapotot leíró sűrűségmátrixhoz mindig található olyan  $\mathcal{H}_2$  tér, illetve egy olyan  $\varrho_{12} \in (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \otimes (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)^*$  állapot, melyre  $\text{Tr}_2 \varrho_{12} = \varrho_1$  és létezik egy  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  állapot, amelyre  $|\Psi\rangle \langle \Psi| = \varrho_{12}$

# Két részrendszeres összefonódás

Spec. két qubit

- $|\Psi\rangle = a|00\rangle + b|10\rangle + c|01\rangle + d|11\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$
- $W = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
- Állapotok lokális unitér transzformációja:  
 $|\Psi\rangle \rightarrow (U \otimes V)|\Psi\rangle, \quad W \rightarrow UWW^T$
- Konkurrencia:  $\mathcal{C} = 2|\det W|$
- Redukált sűrűségmátrix:  $\rho_1 = WW^\dagger = \frac{1}{2}(I + \mathbf{x} \cdot \underline{\sigma}), \quad |\mathbf{x}| \leq 1$

# Geometriai fázis tiszta állapotokon

## Sugarak tere

- Kvantumrendszer állapotai  $|\psi\rangle \in \mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^{n+1}$  és  $n \geq 1$ ;
- Fizikai tartalommal rendelkező mennyiségek érzéketlenek fázisfaktoral való szorzásra  $\frac{\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$ ,  $\frac{|\langle \psi | \phi \rangle|^2}{\|\psi\|^2 \|\phi\|^2}$
- Ekvivalencia reláció:  $|\psi\rangle \sim |\phi\rangle$ , ha  $|\psi\rangle = \lambda |\phi\rangle$ ,  $\lambda \neq 0$
- Valódi állapottér, amely a kvantumrendszer fizikai állapotait tartalmazza, az ekvivalencia-osztályokból áll  $\mathcal{P} = \mathcal{H} / \sim$
- $\mathcal{S}$  felfogható, mint a  $\mathcal{P}$  fölötti  $S^1$  fibrumokból álló totális tér, melynek a struktúra csoportja  $U(1)$

# Geometriai fázis tiszta állapotokon

## Pancharatnam konnexió

- A kérdés: mekkora fáziskülönbség van két normált állapot között?
- Ha egy fibrumhoz tartoznak, akkor az ekvivalencia reláció megadja.
- Pancharatnam ötlete: Két állapot fázisban van, ha az interferenciájuk maximális.

$$e^{i\gamma} = \frac{\langle \psi | \phi \rangle}{|\langle \phi | \psi \rangle|}$$

- A konnexió:  $\mathcal{A} = \Im \frac{\bar{w}_j dw^j}{1 + \bar{w}_k w^k}$
- Az egyforma jelentése:  $e^{i\varphi[C]} = e^{-i \int_C \mathcal{A}}$



# Geometriai fázis tiszta állapotokon

## Berry fázis

- $\mathcal{M}$  - paraméterter
- $\mathcal{S}$  - Normált állapotok tere
- Paraméterteren generált zárt görbe általában nem zárt  $\mathcal{S}$ -n
- Két végállapot közötti geometriai fáziskülönbség a Berry fázis
- A holonómia  $U(1)$

# Geometriai fázis tiszta állapotokon

## Nem Abeli Berry fázis

- A Berry fázis degenerált esete a nem Abeli Berry fázis
- A degenerált altér sajátvektorai között lehetséges az átmenet
- A holonómia  $U(n)$

# Geometriai fázis kevert állapotokon

Hilbert Schmidt tér

- A vizsgált kvantumrendszer ( $\mathcal{H}_1$ ) egy nagyobb rendszer ( $\mathcal{H}$ ) részeként értelmezhető;
- Az egyes részrendszer állapotát megkaphatjuk  $\rho_1 = WW^\dagger$  alakban
- Az általunk észlelhető fizikai mennyiségek nem változnak meg egy  $W \rightarrow WU, U \in U$  transzformációra; ez definiálja az ekvivalencia relációt

# Geometriai fázis kevert állapotokon

## Uhlmann konnexió

- A kérdés: mekkora fáziskülönbség van két normált állapot között?
- Ha egy fibrumhoz tartoznak, akkor az ekvivalencia reláció megadja.
- Pancharatnam ötlete: Két állapot fázisban van, ha az interferenciájuk maximális.

$$\|W_1 + W_2 U\|^2$$

$$U = \sqrt{\varrho_1}^{-1} \sqrt{\varrho_2}^{-1} \sqrt{\sqrt{\varrho_2} \varrho_1 \sqrt{\varrho_2}}$$

- A konnexió:  $2\Im(W^\dagger dW) = \mathcal{A}WW^\dagger + WW^\dagger\mathcal{A}$

# Két qubit vizsgálata

## Berry fázis 1

- A két qubit állapotok vizsgálatára alkalmas Hamilton operátor

$$H(x) = x^\nu \Gamma_\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, 3, 4 \quad \{\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu,\nu} \mathbb{I}$$

- Megmutatható, hogy  $H$  sajátértékei  $\pm r$ ,

$$r = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

- Érdekeség, hogy a fenti Hamilton operátor fizikai tartalommal is bír, hiszen átalakítható

$$H = Q_{mn} J_m J_n, \quad Q = Q^T, \quad \text{Tr } Q = 0$$

alakra, amely láthatóan időtükrözésre invariáns, így a holonómia  $SU(2) \subset U(2)$ .

# Két qubit vizsgálata

## Berry fázis 2

- A két qubit kvantumállapotot az alábbi módon kaphatjuk meg a fenti formalizmusból

$$|u_+^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{r(r+x_4)}} \begin{pmatrix} (1+x_4)| \\ x_0| - i\underline{x} \underline{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0 \\ Q_1 \end{pmatrix}$$

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_0 + iQ_1)$$

- $S^4 / \{S^4 \text{ Déli pólusa}\}$ -án értelmezett konnexió forma

$$\mathcal{A}^\circ = \mathfrak{S} \langle u_\pm | du_\pm \rangle = \frac{1}{2r(r+x_4)} \mathfrak{S} (X^\dagger dX)$$

# Két qubit vizsgálata

## Geometriai fázis

- Az unitér időfejlődést leíró  $U(t) = e^{S(t)}$  általánosan egy  $U(4)$  unitér mátrix. Egyparaméteres evolúció esetén  $Spin(5) \subset U(4)$
- A matematikai irodalom alapján átalakítható

$$S \equiv \alpha^\kappa T_\kappa = \frac{1}{4} \alpha^{\mu,\nu} [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]$$

- $\alpha^{\mu,\nu} = x^\mu y^\nu - x^\nu y^\mu$  antiszimmetrikusan választhatjuk, mert a szimmetrikus tag nem jelenik meg  $\Gamma_\mu$ -k miatt
- Nem Abeli esetben a dinamikai és a geometriai fázis nem szeparálható, mert nem feltétlenül kommutáló mátrixok. Aharonov és Anandan munkássága nyomán tudjuk, hogy a dinamikai rész zérussá tehető, ez nekünk az  $x^\mu y_\mu = 0$  feltételt szabja. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy  $x_\mu x^\mu = y_\mu y^\mu = 1$  normáltak. Az exponencializálás elvégezhető:

$$e^{tS} = \cos\left(\frac{t}{2}\right) \mathbb{I} + \sin\left(\frac{t}{2}\right) S$$

# Két qubit vizsgálata

## Geometria

- A két qubit normált állapotok tere  $S^7$
- A vizsgált problémától függően bevezethető két leképezés:
  - $\pi_1 : S^7 \rightarrow S^4$ , ekkor a nyaláb  $S^3 \cong SU(2)$
  - $\pi_2 : S^7 \rightarrow \mathcal{D}$ , ekkor a nyaláb  $U(2)$



# Két qubit vizsgálata

## Nem Abeli Berry és Uhlmann konnexió kapcsolata

- Az Uhlmann konnexió ( $\mathcal{A}$ )

$$dW^\dagger W - W^\dagger dW = WW^\dagger \mathcal{A} + \mathcal{A}WW^\dagger$$

- A nem Abeli Berry konnexió ( $\mathcal{A}^\circ$ )

$$\mathcal{A}^\circ = \Im \langle Q, dQ \rangle = \Im \left( Q_0^\dagger dQ_0 + Q_1^\dagger dQ_1 \right), \quad W = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_0 + iQ_1)$$

- Megmutatható, hogy a nem Abeli Berry konnexió az Uhlmann konnexió megszorítása

$$\mathcal{A}|_{Q_2} = \mathcal{A}^\circ, \quad Q_2 = \{W | \det W \in \mathbb{R}\} \leftrightarrow x_0 \equiv 0 \leftrightarrow \text{Tr} \mathcal{A} = 0$$

## Példaszámolás

- $H = x^\nu \Gamma_\nu = \begin{bmatrix} x^4 I & x^0 I + i \underline{x} \underline{\sigma} \\ x^0 I - i \underline{x} \underline{\sigma} & -x^4 I \end{bmatrix}$
- $u_+ = N_+ P_+ |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+x_4)}} \begin{bmatrix} (1+x_4) I \\ -i \underline{x} \underline{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \end{bmatrix}$
- $u_+(t) = e^{tS} u_+, S = \frac{1}{2} (y_\nu \Gamma_\nu) (x_\mu \Gamma_\mu)$

$$\left( \cos\left(\frac{t}{2}\right) \mathbb{I} + \sin\left(\frac{t}{2}\right) S \right) \frac{1}{\sqrt{2(1+x_4)}} \begin{bmatrix} (1+x_4) I \\ -i \underline{x} \underline{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0(t) \\ Q_1(t) \end{bmatrix}$$

- Megadható a purifikáció időfüggése  $W(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_0(t) + iQ_1(t))$

# Példaszámolás

## Eredmények - Kvantum beugrás, geodetikus időfejlesztés

- *Geodesic law*: Sugarak terén történő kvantum beugrás esetén a felszedett fázis éppen

$$|\Psi\rangle \rightarrow |\Phi\rangle \frac{\langle\Phi|\Psi\rangle}{|\langle\Phi|\Psi\rangle|}$$

- Általában is igaz, hogy az állapot parallel transzláltja a rövidebb geodetikus mentén (a megfelelő metrikára nézve) ugyanaz, mint a kvantum beugrás eredménye

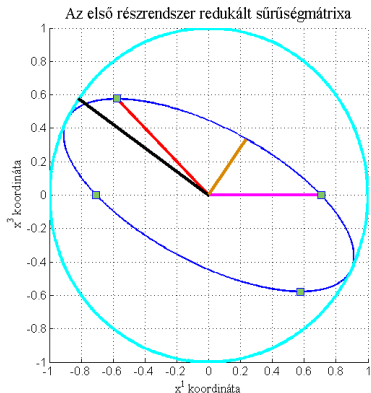
# Példaszámolás

## Eredmények - Első részrendszer

- $\varrho_1(\underline{\mathbf{u}}(t)) = W(t) W^\dagger(t) = \frac{1}{2} (I + \underline{\mathbf{u}}(t) \underline{\sigma})$
- $\underline{\mathbf{u}}(t) = \cos(t) \underline{\mathbf{x}} + \sin(t) \underline{\mathbf{y}}$
- $\mathcal{C}(t) = \sqrt{1 - |\underline{\mathbf{u}}(t)|^2} = |\cos(t) x_4 + \sin(t) y_4|$
- Ez a számolás jól illusztrálja, hogy geodetikus szegmenseken a kvantum beugrás és a folytonos időfejlődés ekvivalens

# Példaszámolás

## Első részrendszer



- Kék vonal - első részrendszer
- Zöld jelölőnégyzetek - ( $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ ) időpontban az állapotok
- Magenta, piros - generáláshoz szükséges segédmenység
- Narancs - legnagyobb konkurenciájú állapot
- Fekete - kettes részrendszer időfejlődését jellemző állapot

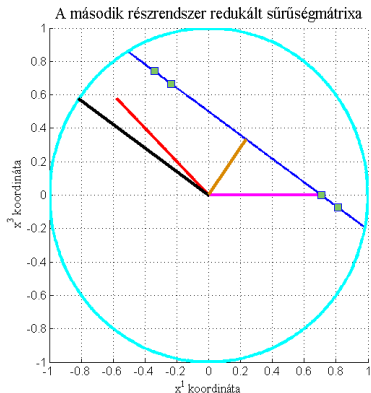
# Példaszámolás

## Eredmények - Második részrendszer

- $\overline{\rho_2(\underline{\mathbf{v}}(t))} = W^\dagger(t) W(t) = \frac{1}{2} (I + \underline{\mathbf{v}}(t) \underline{\sigma})$
- $\underline{\mathbf{v}}(t) = \underline{\mathbf{x}} + ((1 - \cos(t)) y_4 + \sin(t) x_4) \underline{\mathbf{n}}, \quad \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{y}} - \frac{y_4}{1+x_4} \underline{\mathbf{x}}$

# Példaszámolás

## Második részrendszer



- Kék vonal - második részrendszer
- Zöld jelölőnégyzetek - ( $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ ) időpontban az állapotok
- Magenta, piros - generáláshoz szükséges segédmenyiség
- Narancs - legnagyobb konkurenciájú állapot
- Fekete - kettes részrendszer időfejlődését jellemző állapot

# Példaszámolás

## Hullámfüggvény és időfejlésztés

- Megmutatható, hogy az általunk leírt két qubit időfejlődés felírható, mint  $|\Psi\rangle = \cos\left(\frac{t}{2}\right) |\alpha_1\rangle + \sin\left(\frac{t}{2}\right) |\alpha_2\rangle$ , azaz  $\mathbb{C}^4$  egy két dimenziós hiperfelületén történik a mozgás, mint azt vártuk.
- Ezen a két dimenziós altéren felírhatjuk a Hamilton operátort

$$H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

- Megadható az időfejlesztő operátor is

$$U(t) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{t}{2}\right) & -\sin\left(\frac{t}{2}\right) & 0 & 0 \\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) & \cos\left(\frac{t}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- Különböző nyálábok vizsgálata
- Sjöqvist csoport kvaterniós fázis (nem Abeli Berry) mérési kísérlete
- Magasabb dimenziós rendszerekbe való beágyazás

- Holonómia - klasszikus, kvantum
- Geometriai fázisok - Berry, Uhlmann
- Alkalmazás két qubitra
- Kitekintés

Köszönöm a figyelmet!