

# Hosszú hatótávolságú, rendezetlen rendszerek kritikus viselkedése

Juhász Róbert

MTA Wigner FK, SZFI



Iglói Ferenc (Wigner FK, SZTE)

Kovács István (Wigner FK; Northeastern University, Boston)

# *Fázisátalakulások sokrészecske-rendszerekben*

---

- folytonos fázisátalakulás (kritikus pont), univerzalitási osztályok
- homogén rácsmodellek, rövid hatótávolságú (legközelebbi-szomszéd) kölcsönhatás
- kritikus viselkedést megváltoztatja:
  - a) hosszú hatótávolságú kölcsönhatás:  $J_{ij} \sim |i - j|^{-\alpha}$
  - b) rendezetlenség (térbeli inhomogenitás)

$$H = - \sum_{ij} J_{ij} s_i s_j \quad s_i = \pm 1, J_{ij} > 0$$

- **rövid hatótávolságú k.h.**

- $d > 1$ , ferromágneses rendeződés, másodrendű fázisátalakulás
- felső kritikus dimenzió:  $d_u = 4$

- **hosszú hatótávolságú k.h.** ( $J_{ij} \sim |i - j|^{-(d+\sigma)}$ ) ( $d < 4$ )

- a)  $\sigma < \sigma_{MF}$ : átlagtér-viselkedés
- b)  $\sigma_{MF} < \sigma < \sigma_{RH}$ :  $\sigma$ -val folytonosan változó kritikus exponensek
- c)  $\sigma > \sigma_{RH}$ : rövid hatótávolságú viselkedés

$$\sigma_{MF} = d/2$$

$$\sigma_{RH} = 2 - \eta_{RH}$$

*Fisher, Ma, Nickel 1972*

*Sak 1973*

$d = 1$ : véges hőmérsékletű rendeződés, ha  $\sigma \leq \sigma_{RH} = 1$

## Rendezetlenség

- Véletlen hígítás

- $d = 2$ : logaritmikus korrekciók vagy változó exponensek?
- $d = 3$ : módosult exponensek (független a hígítástól)

- Véletlen tér

- $H = - \sum_{\langle ij \rangle} J s_i s_j - \sum_i h_i s_i \quad \rho(h) = \rho(-h)$
- nincs ferromágneses rendeződés, ha  $d \leq 2$
- átlagtér-elmélet: ha  $\rho(h)$  folytonos, az átalakulás másodrendű; ha  $\rho(h)$  diszkrét, akkor lehet első- vagy másodrendű
- $d = 3$ : mágnesezettség nem folytonos, látens hő nincs

- Spinüvegek

## Hosszú hatótávolságú k.h. + rendezetlenség

- **véletlen terű Ising-modell**

- $d = 1$ : fázisátalakulás, ha  $\sigma < 1/2$  *Bray 1986*
- kvalitatíve hasonló a homogén modelléhez:  
átlagtér  $\rightarrow \sigma$ -függő tartomány  $\rightarrow$  rövid hatótávolságú *Reynal 2005*

- **spinüvegek**

A  $\sigma$  hasonlóan befolyásolja a kritikus tulajdonságokat, mint a dimenzió a rövid hatótávolságú modellekben.

# Merőleges terű Ising-modell

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle ij \rangle} J \sigma_i^x \sigma_j^x - \sum_i h \sigma_i^z$$

- $\sigma_i^x, \sigma_i^z$  Pauli-mátrixok;  $J$  csatolás,  $h$  külső tér
- **Suzuki-Trotter leképezés**

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}} = \text{Tr} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} (1 - \Delta\tau \mathcal{H})^{\beta/\Delta\tau}$$

$d + 1$  dimenziós, klasszikus Ising modell,  
kiterjedés az extra (imaginárius idő)  
dimenzióban:  $\frac{1}{k_B T}$ .

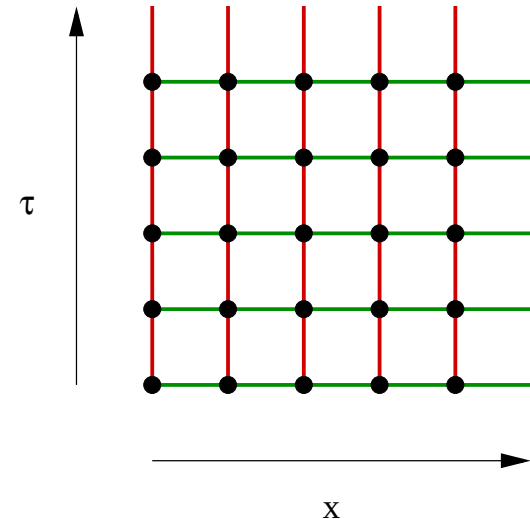
- **T>0** klasszikus,  $d$  dimenziós Ising univerzalitási osztály

- **T=0**

$J > h$ : FM,  $m = \langle \sigma_i^x \rangle > 0$

$J < h$ : PM,  $m = \langle \sigma_i^x \rangle = 0$

$J = h$ , kvantum-fázisátalakulás;  
klasszikus,  $d + 1$  dimenziós Ising  
univerzalitási osztály



# A h.h. kvantum-Ising-modell

$$\mathcal{H} = - \sum_{i \neq j} \frac{b}{l_{ij}^{d+\sigma}} \sigma_i^x \sigma_j^x - \sum_i h \sigma_i^z$$

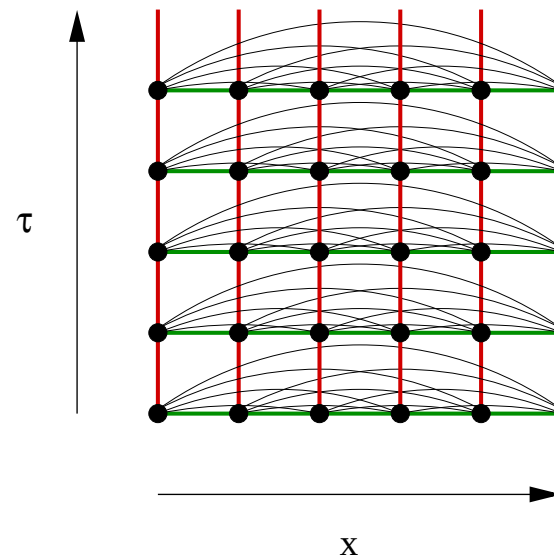
- **ST-leképezés:** Ising-modell,  $d$  irányban hosszú hatótávolságú k.h., az imaginárius idő irányában legközelebbi szomszéd k.h.
- $d_u = \min\{\frac{3}{2}\sigma, 3\}$

- $\sigma < \sigma_{MF}$ : átlagtér-elmélet
- $\sigma_{MF} < \sigma < \sigma_{RH}$ :  $\sigma$ -függés,  $z(\sigma) < 1$
- $\sigma > \sigma_{RH}$ : rövid hatótávolságú ( $z = 1$ )

$$\sigma_{MF} = \frac{2}{3}d$$

$$\sigma_{RH} = 2 - \eta_{RH}(d + 1)$$

*Dutta, Bhattacharjee 2001*



anizotróp skálázás:

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu_{\perp}}$$

$$\tau \sim |T - T_c|^{-\nu_{\parallel}}$$

$$\tau \sim \xi^z$$

dinamikai exponens:

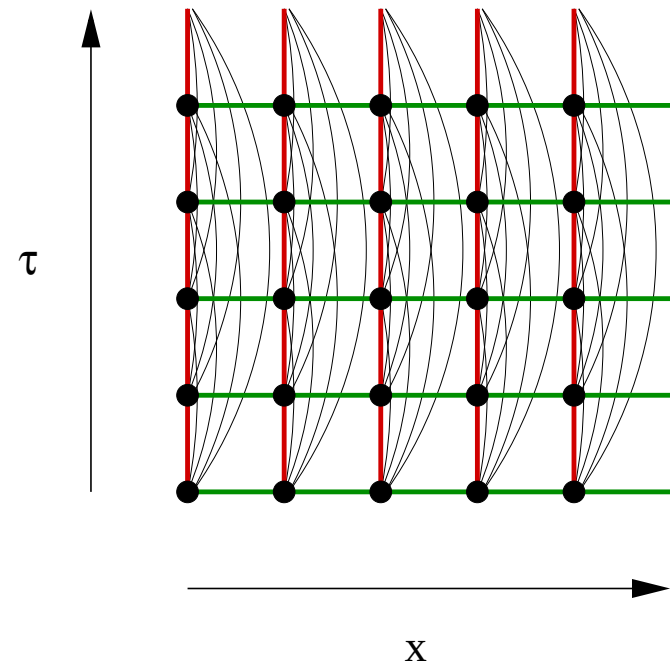
$$z = \nu_{\parallel} / \nu_{\perp} < 1$$

# A disszipatív kvantum-Ising-lánc

$$\mathcal{H} = - \sum_i J \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - \sum_i h \sigma_i^z + \sum_{i,k} [C_k (a_{i,k}^\dagger + a_{i,k}) \sigma_i^x + \omega_{i,k} a_{i,k}^\dagger a_{i,k}]$$

spektrális függvény:  $J(\omega) \sim \omega^s$

- **ST-leképezés:**  $2d$  Ising-modell, imaginárius idő irányában hosszú hatótávolságú k.h. ( $\sim 1/\tau^{1+s}$ )
- $s = 1$ 
  - $d_u = 2$ , perturbatív RG  
*Pankov 2004, Sachdev et al. 2004*
  - $d = 1$ , Monte Carlo szimuláció  
anizotróp skálázás:  
 $\xi \sim |T - T_c|^{-\nu_\perp} \quad \nu_\perp \approx 0.63$   
 $\tau \sim |T - T_c|^{-\nu_\parallel}$   
 $\tau \sim \xi^z, z = \nu_\parallel / \nu_\perp \approx 2$   
*Werner et al. 2005*



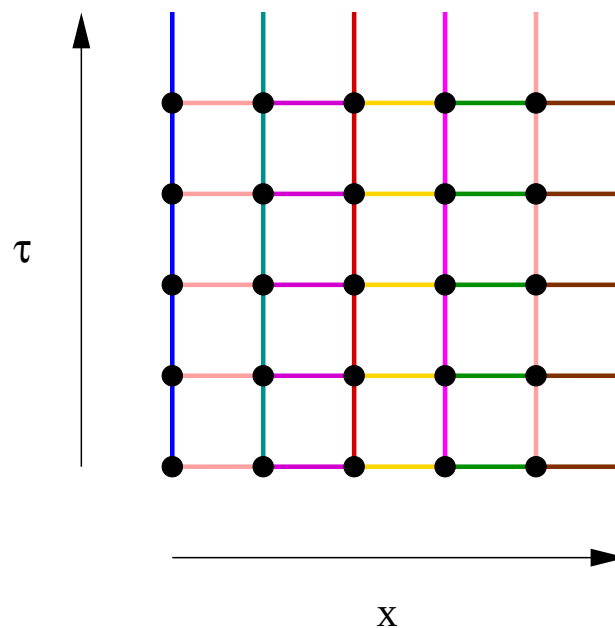


# A rendezetlen kvantum-Ising-modell

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \sigma_i^x \sigma_j^x - \sum_i h_i \sigma_i^z$$

- $J_{ij}$ ,  $h_i$  véletlen csatolások
- **ST-leképezés:** véletlen kötésű Ising-modell, az imaginárius idő irányában azonos csatolásokkal (sávos rendezetlenség) ( $d = 1$ : McCoy-Wu-modell)
- erős rendezetlenségi RG (SDRG) módszer: a kvantum-kritikus viselkedést egy *végtelenül rendezetlen fixpont* írja le minden dimenzióban
- erős anizotrópia:  $\ln \tau \sim \xi^\psi$  ( $z = \infty$ )  
 $d = 1$ :  $\psi = 1/2$

Fisher 1994

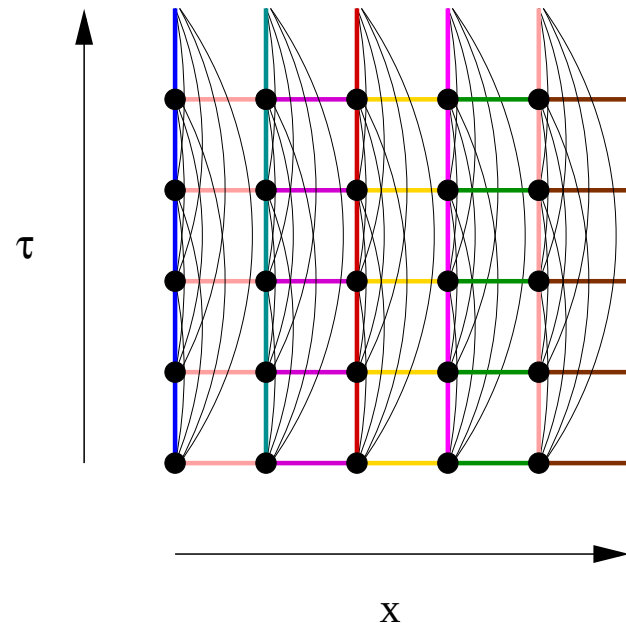


# A rendezetlen, disszipatív kvantum-Ising-lánc

$$\mathcal{H} = - \sum_i J_i \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - \sum_i h_i \sigma_i^z + \sum_{i,k} [C_k (a_{i,k}^\dagger + a_{i,k}) \sigma_i^x + \omega_{i,k} a_{i,k}^\dagger a_{i,k}]$$

$$J(\omega) \sim \omega^s$$

- **ST-leképezés:** sávok rendezetlenség + hosszú hatótávolságú k.h. az imaginárius idő irányában
- $d = 1, s = 1 \rightarrow K(\tau) \sim 1/\tau^2$   
*Vojta 2003; Rieger, Schehr 2006*
- az erősen csatolt sávok rendeződnek valamilyen  $T_{c,i}$  hőmérsékleten (kvázi-egydimenziós, h.h. Ising-modell,  $\sigma = 1$ )
- a rendeződött sávok aránya (rendparaméter) a  $T$  sima függvénye  $\Rightarrow$  nincs éles fázisátalakulás
- $s > 1$ :  $\ln \tau \sim \xi^\psi$



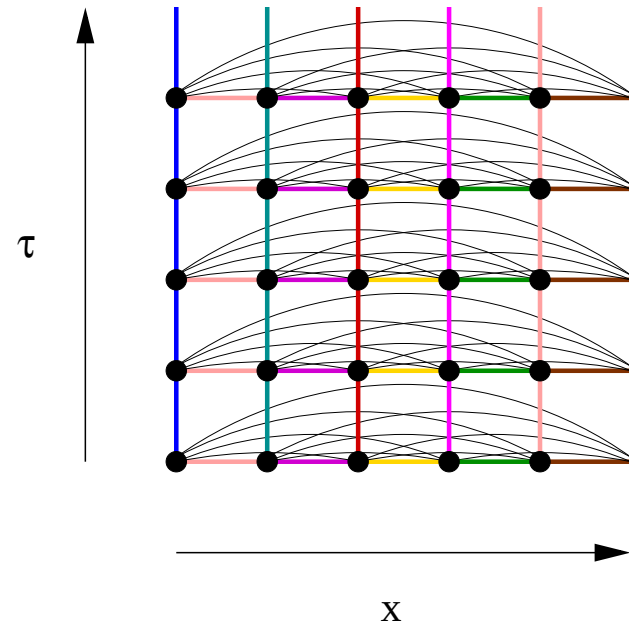
# A h.h. rendezetlen kvantum-Ising-modell

$$\mathcal{H} = - \sum_{i \neq j} J(l_{ij}) \sigma_i^x \sigma_j^x - \sum_i h_i \sigma_i^z$$

$$J(l_{ij}) = \frac{b_{ij}}{l_{ij}^\alpha}$$

$$\alpha \equiv d + \sigma$$

- **ST-leképezés:** Ising-modell,  $d$  irányban hosszú hatótávolságú k.h. + sávos rendezetlenség
- $z=?$
- $\text{LiHo}_x\text{Y}_{1-x}\text{F}_4$  merőleges térben, mágneses dipólus-dipólus k.h. ( $\sim l^{-3}$ ) + véletlen longitudinális tér



# Griffiths-McCoy szingularitás a paramágneses fázisban

## Rövid hatótávolságú, rendezetlen modell

- Paramágneses fázisban ferromágneses domének.  
Valószínűségük  $e^{-An}$ , gerjesztési energiájuk  $\epsilon \sim e^{-Bn}$ .  
Eloszlás:  $P_{<}(\epsilon) \sim \epsilon^{d/z}$   $d/z = A/B$ .

$$\epsilon_L \sim L^{-z}$$

A  $z$  dinamikai exponens folytonosan változik a  $\Delta$  kontroll-paraméterrel

$$\Delta \rightarrow 0 \quad z(\Delta) \rightarrow \infty$$

Átlagos szuszceptibilitás divergál, ha  $z > d$ . *Griffiths 1969, McCoy 1969*

- Domének egymástól függetlenek
  - $\ell^d$  térfogatban a legkisebb gerjesztési energia  $\epsilon \sim \ell^{-z}$
  - effektív csatolás:  $J \sim e^{-c\ell}$
  - $J \ll \epsilon$

# Griffiths-fázis a h.h. modellben

## Hosszú hatótávolságú, rendezetlen modell

- Tegyük fel, hogy létezik Griffiths-fázis, és egy pontjában a dinamikai exponens  $z$ .
- Függetlenek-e a domének?
- $\ell^d$  térfogatban a legkisebb gerjesztési energia:  $\epsilon \sim \ell^{-z}$
- effektív csatolás:  $J \sim \ell^{-\alpha}$
- $J \ll \epsilon$ , ha  $z < \alpha$

Felső korlát a Griffiths-fázisbeli dinamikai exponensre:  $z < \alpha$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0+} z(\Delta) = \alpha$$

# Erős-rendezetlenségi renormálási módszer

- Rendezetlen kvantum-spinláncok

*Ma, Dasgupta, Hu 1979; Fisher 1994*

Nagy energiájú gerjesztések fokozatos eliminációja. Kisebb effektív rendszer; a spektrum alacsonyenergiás része változatlan.

- Rendezetlen kvantum-Ising-lánc

$$\mathcal{H} = - \sum_i J_i \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - \sum_i h_i \sigma_i^z$$

$$\Omega = \max\{J_i, h_i\}$$

Kétféle redukciós lépés:

a)  $\Omega = h_i \gg J_{i-1}, J_i$ : spin decimálás

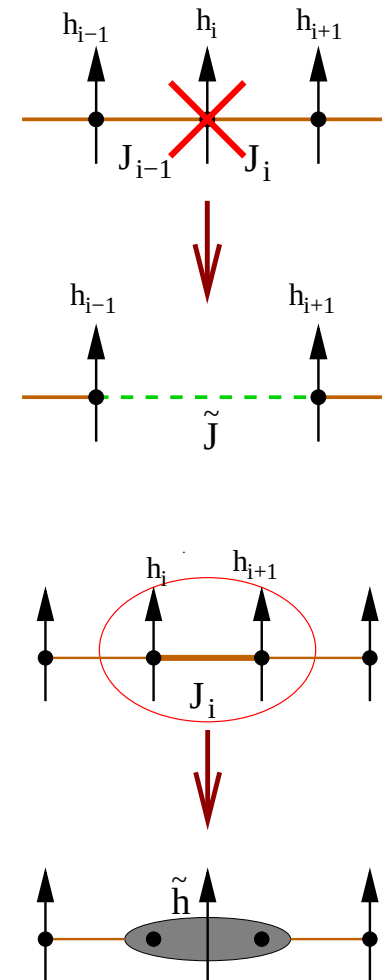
effektív csatolás:  $\tilde{J} = J_{i-1} J_i / \Omega$

b)  $\Omega = J_i \gg h_{i-1}, h_i$ : "összeolvasztás"

effektív tér:  $\tilde{h} = h_{i-1} h_i / \Omega$

mágneses momentum:  $\tilde{\mu} = \mu_1 + \mu_2$

- rövidebb kvantum-Ising-lánc, módosult paraméterekkel



# Erős-rendezetlenségi renormálási módszer

- Fenti lépéseket iterálva  $\Omega$  fokozatosan csökken,  $\ell = 1/c$  hosszúságskála növekszik. Csatolások, terek függetlenek maradnak  $\Rightarrow$  analitikusan kezelhető
- A kritikus pontban a logaritmikus paraméterek eloszlása szélesedik; a *végtelenül rendezetlen fixpontban* az eljárás “aszimptotikusan egzakt”.

$$\ln(1/\Omega) = \ln \tau \sim \ell^\psi$$

$$\psi = 1/2$$

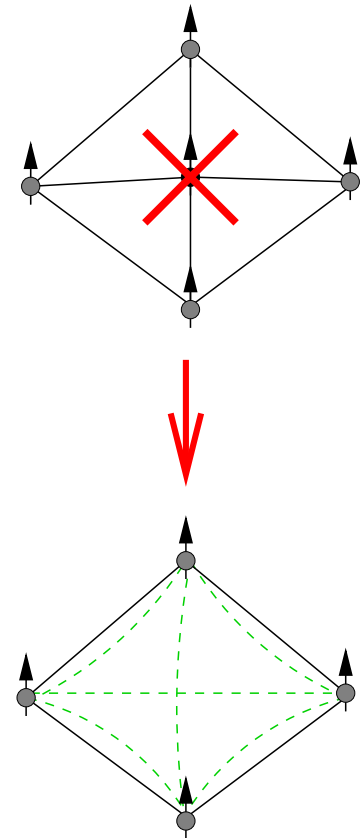
Fisher 1994

## Magasabb dimenziók

- A decimálás lépés után a decimált spin szomszédai közt új, effektív kötések. “Dupla” kötések kezelése:
  - összeg-szabály:  $\tilde{J}_{ik} = J_{ik}^0 + J_{ik}$
  - maximum-szabály:  $\tilde{J}_{ik} = \max\{J_{ik}^0, J_{ik}\}$

Numerikus renormálás: végtelenül rendezetlen fixpont minden dimenzióban.

$$\ln \tau \sim \ell^{\psi_d} \quad \psi_d \approx 1/2 \quad (d = 2, 3, 4) \quad \text{Kovács, Iglói 2010}$$



# A hosszú hatótávolságú modell renormálása

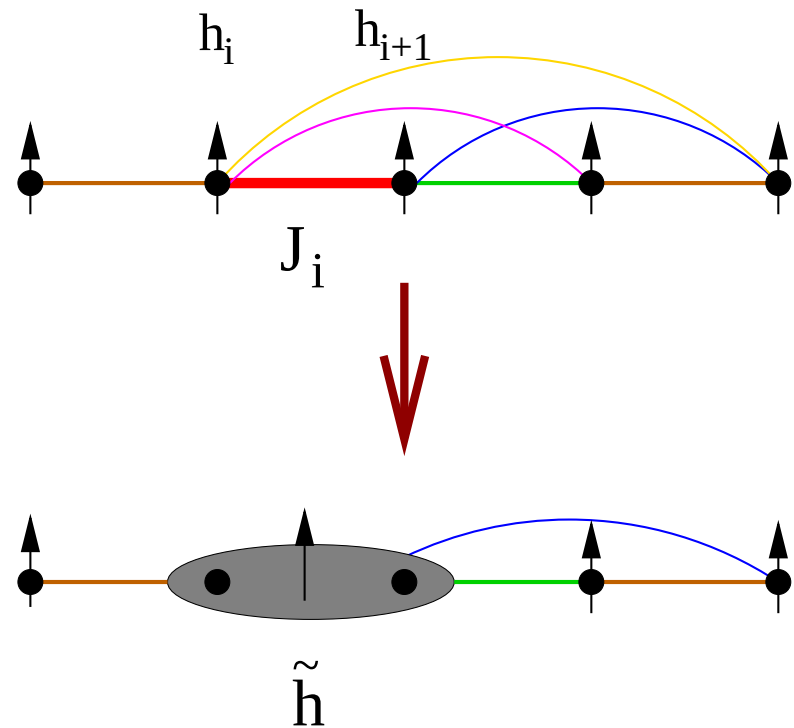
Egydimenziós modell. Teljes összekapcsoltság miatt az összeg-szabály kivitelezhetetlen. A maximum-szabály egyszerű sémára vezet.

$\alpha > d$  (extenzív)

Homogén csatolás:  $J(l) = l^{-\alpha}$

a) **Összeolvasztás ( $\Omega = J_i$ )**

- effektív tér:  $\tilde{h} = h_{i-1}h_i/\Omega$
- Az új klaszter és egy másik spin közötti csatolás a klaszterbeli legközelebbi spin csatolása lesz.





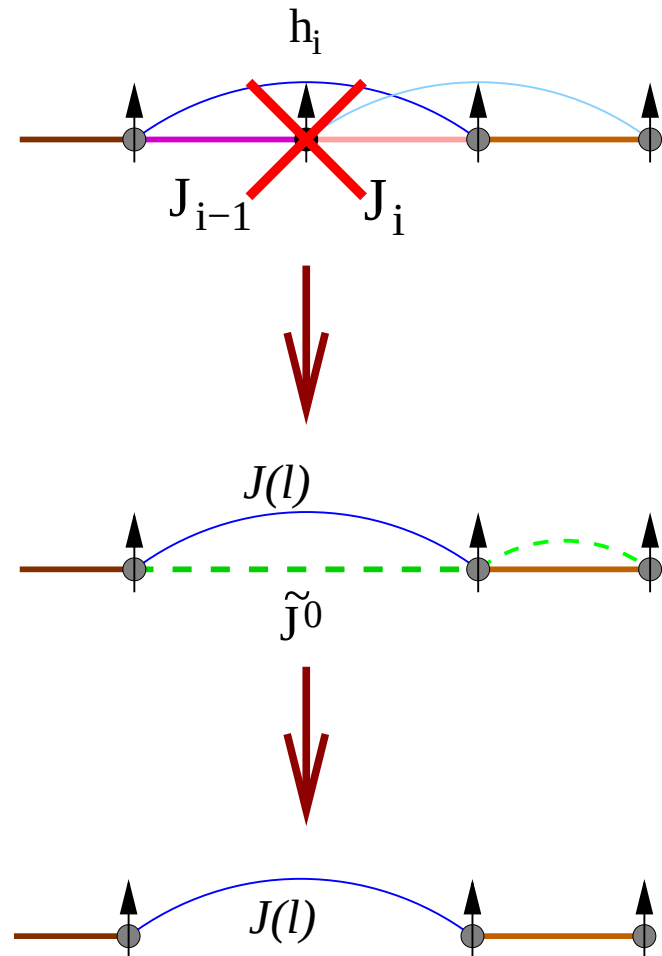
# A hosszú hatótávolságú modell renormálása

## a) Spin decimálás ( $\Omega = h_i$ )

- Generált csatolás  $j$  és  $k$  között:  

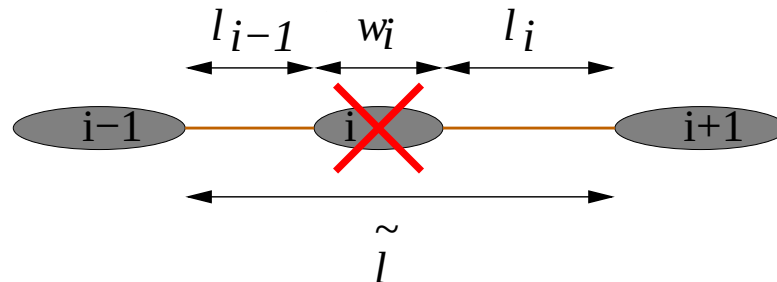
$$\tilde{J}_{jk}^0 = J_{ji} J_{ik} / \Omega$$
- Közvetlen (h.h.) csatolás:  $J(l_{jk}) = l_{jk}^{-\alpha}$
- $\tilde{J}_{jk}^0 \ll J(l_{jk})$ 
  - Szomszédos spinek közötti effektív csatolás:  

$$\tilde{J}_{i-1,i+1} = (l_{i-1,i+1})^{-\alpha}$$
  - Többi csatolást nem változtatjuk.



# Egyszerűsített renormálási séma

- Mindig szomszédos klasztereket olvasztunk össze. Klaszterek közötti csatolás a legközelebbi spinjeik közötti h.h. csatolás:  $J(l) = l^{-\alpha}$ .
- Egydimenziós struktúra. Változók:  $h_i, l_i, w_i$ .



$$\tilde{l} = l_{i-1} + l_i + w_i$$

Paramágneses fázisban, kritikus pontban  $w \ll l$ .

$$\tilde{l} \simeq l_{i-1} + l_i$$

a) összeolvasztás:

$$\tilde{h} = h_{i-1} h_i / J_{i-1,i}$$

b) spin decimálás:

$$\tilde{J} = (J_{i-1,i}^{-1/\alpha} + J_{i,i+1}^{-1/\alpha})^{-\alpha}$$

# Egyszerűsített renormálási séma

- A  $\zeta = (\frac{\Omega}{J})^{1/\alpha} - 1$  és  $\beta = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\Omega}{h}$  redukált változókkal a renormálási szabályok additívak:

a) összeolvasztás:  $\tilde{\beta} = \beta_i + \beta_{i+1}$

b) spin decimálás:  $\tilde{\zeta} \simeq \zeta_{i-1} + \zeta_i$

- logaritmikus energiaskála:  $\Gamma \equiv \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\Omega_0}{\Omega}$ , eloszlások:  $g_\Gamma(\beta)$ ,  $f_\Gamma(\zeta)$
- evolúciós egyenletek:

$$\frac{\partial g_\Gamma(\beta)}{\partial \Gamma} = \frac{\partial g_\Gamma(\beta)}{\partial \beta} + f_0(\Gamma) \int d\beta' g_\Gamma(\beta') g_\Gamma(\beta - \beta') + g_\Gamma(\beta) [g_0(\Gamma) - f_0(\Gamma)]$$

$$\frac{\partial f_\Gamma(\zeta)}{\partial \Gamma} = (\zeta + 1) \frac{\partial f_\Gamma(\zeta)}{\partial \zeta} + g_0(\Gamma) \int d\zeta' f_\Gamma(\zeta') g_\Gamma(\zeta - \zeta') + f_\Gamma(\zeta) [f_0(\Gamma) + 1 - g_0(\Gamma)]$$

- $g_\Gamma(\beta) = g_0(\Gamma) e^{-g_0(\Gamma)\beta}$        $f_\Gamma(\zeta) = f_0(\Gamma) e^{-f_0(\Gamma)\zeta}$

- $\frac{dg_0(\Gamma)}{d\Gamma} = -f_0(\Gamma)g_0(\Gamma), \quad \frac{df_0(\Gamma)}{d\Gamma} = f_0(\Gamma)(1 - g_0(\Gamma))$

$r(\Omega) = \text{összeolvasztás gyakorisága} / \text{decimálás gyakorisága}$

$z(\Omega)$ : "effektív dinamikai exponens"  $l \sim \left(\frac{\Omega_0}{\Omega}\right)^{1/z(\Omega)}$

## Paramágneses fázis

$$l \sim \left(\frac{\Omega_0}{\Omega}\right)^{1/z}$$

$$z < \alpha$$

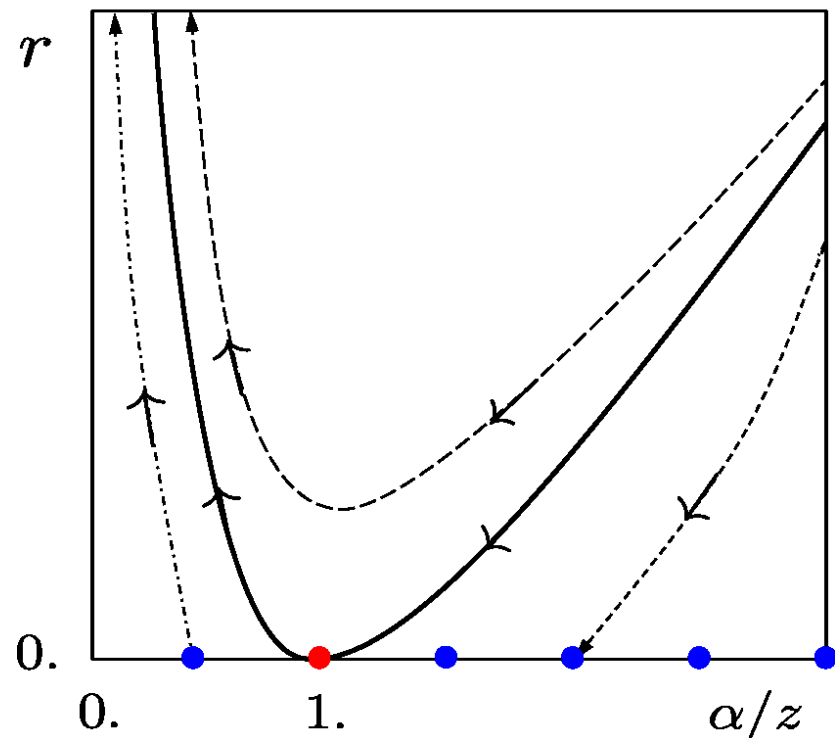
Griffiths-fázis

## Kritikus pont

$$l \sim \left(\frac{\Omega_0}{\Omega}\right)^{1/\alpha} \left[\ln \frac{\Omega_0}{\Omega}\right]^2$$

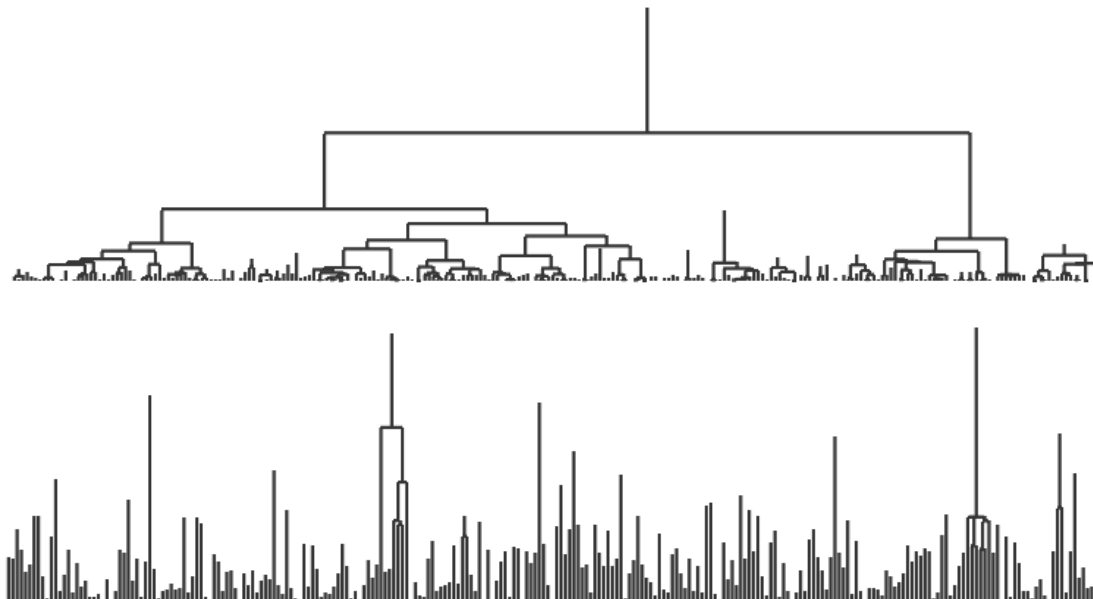
$$z_c = \alpha + \text{logaritmikus korrekció}$$

erősen rendezetlen fixpont



# Klaszterszerkezet, mágnesezettség

- A legnagyobb ferromágneses klaszter átlagos momentuma:  $\mu(L)$ .  
Átlagos (spontán) mágnesezettség:  $m(L) = \mu(L)/L \rightarrow 0$  ( $L \rightarrow \infty$ )
- Rövid hatótávolságú (kritikus) modell:  $\mu(L) \sim L^{d_f}$  ( $d_f < 1$ )
- Hosszú hatótávolságú (kritikus) modell:  $\mu(L) \sim (\ln L)^2$   $d_f = 0$



# Összefonódási entrópia

- Végtelen lánc  $|\psi\rangle$  alapállapotban
  - $L$  spinből álló blokk (rendszer) + környezet
  - rendszer sűrűségoperátora:  $\rho_L = \text{Tr}_K |\psi\rangle\langle\psi|$
  - összefonódási entrópia:  $S_L = -\text{Tr}_R(\rho_L \ln \rho_L)$
- homogén, rövid hatótávolságú kritikus spinláncokban  $S_L \simeq \frac{c}{3} \ln L + k$   
*Calabrese, Cardy 2004*
- SDRG alapállapot:  $|\psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \otimes |\phi_3\rangle \otimes \dots$   
n. spinklaszter állapota:  $|\phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow_{m_1} \uparrow_{m_2} \dots \uparrow_{m_n}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow_{m_1} \downarrow_{m_2} \dots \downarrow_{m_n}\rangle$
- Minden egyes "átmetszett" klaszter járuléka  $\ln 2$ .  
 $S_L$  az  $l = m_{i+1} - m_i$  távolság  $\mathcal{N}(l)$  eloszlásából számítható:  
$$S_L \sim 2 \ln 2 \int^L l \mathcal{N}(l) dl$$
  - r.h. modell:  $\mathcal{N}(l) \sim \frac{1}{6} l^{-2} \Rightarrow S_L \sim \frac{\ln 2}{6} \ln L$  *Refael, Moore 2004*
  - h.h. modell:  $\mathcal{N}(l) \sim (\ln l)^{-4} l^{-2} \Rightarrow S_L \simeq S_\infty + O[(\ln L)^{-3}]$

Az összefonódási entrópia korlátos marad a kritikus pontban.

# Javított renormálási séma

- Szomszédos klaszterek esetén az összes alkotó spin közötti h.h. kölcsönhatást figyelembe vesszük (összegzünk). Egydimenziós struktúra módosult szabályokkal.

a) *decimálás*: 
$$\tilde{J}_{n-1,n+1} = \frac{J_{n-1,n} J_{n,n+1}}{h_n} + \sum_{i \in \mathcal{C}_{n-1}, j \in \mathcal{C}_{n+1}} J(l_{ij})$$



b) *összeolvasztás*: 
$$\tilde{h} = h_n h_{n+1} / J_{n,n+1}$$

új klaszter csatolása: 
$$J_{\tilde{n},n+2} = J_{n+1,n+2} + \sum_{i \in \mathcal{C}_n, j \in \mathcal{C}_{n+2}} J(l_{ij})$$

- effektív csatolás: 
$$\tilde{J} \approx J(l) \mu_n \mu_{n+2}$$
- A  $J_{n,n+1}^0 \sim J_{n,n+1} / \mu_n \mu_{n+1}$  és  $h_n^0 \sim h_n / \mu_n^2$  redukált változókkal a renormálási szabályok közelítőleg olyanok, mint az egyszerűsített sémában. ( $\mu$  keskeny eloszlású.) Redukált energiaskála: 
$$\Omega^0 \sim \Omega / \mu^2(\Omega)$$

- módosult dinamikai reláció: 
$$l \sim \left( \frac{\Omega_0}{\Omega} \right)^{1/\alpha} \left[ \ln \frac{\Omega_0}{\Omega} \right]^{2+4/\alpha}$$

- $\mu(L)$  és  $S_L$  változatlan

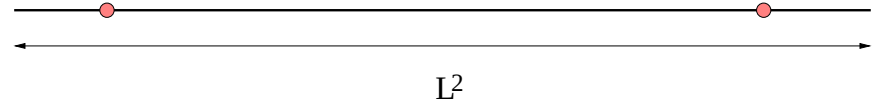
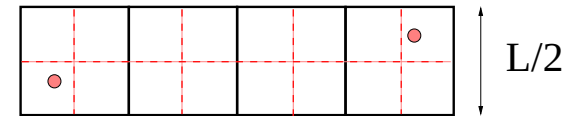
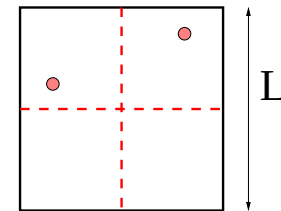
# Magasabb dimenziók

- $d$ -dimenziós modell,  $\alpha$  kölcsönhatási exponens,  $L^d$  hiperkocka. Átrendezés egy dimenzióba ( $L^d$  hosszúságú lánc).
- távolságok megnyúlnak:  $l \rightarrow O(l^d)$   
 $\Rightarrow 1d$  modell  $\alpha' = \alpha/d$  kölcsönhatási exponenssel
- $1d$  eredményekben  $l \rightarrow l^d$ ,  $\alpha \rightarrow \alpha/d$  helyettesítés

$$l \sim \left( \frac{\Omega_0}{\Omega} \right)^{1/\alpha} \left[ \ln \frac{\Omega_0}{\Omega} \right]^{2/d+4/\alpha}$$

$$z_c = \alpha$$

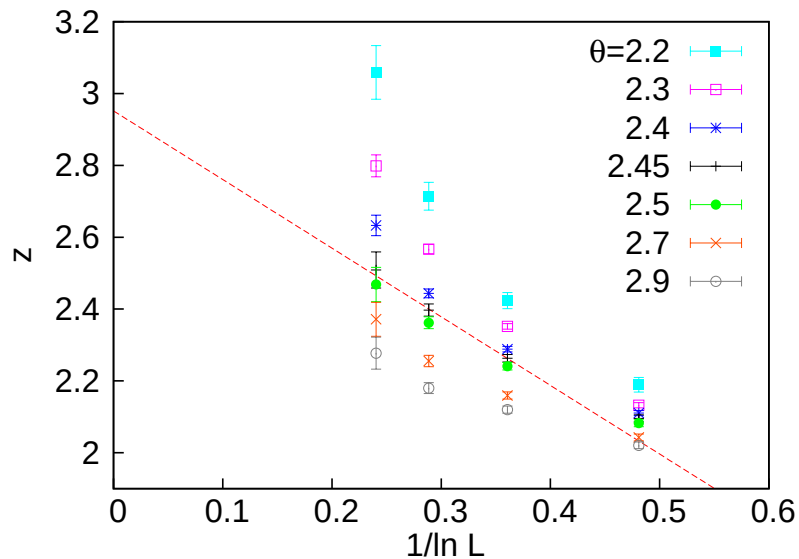
$$\mu(L) \sim (\ln L)^2$$



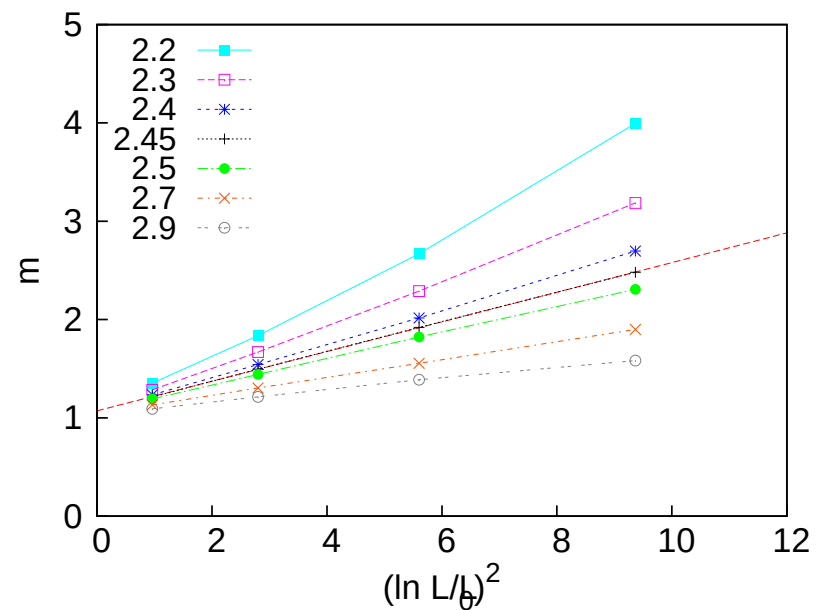


# Numerikus renormálás két dimenzióban

- maximum-szabályon alapuló numerikus renormálás
- $L = 64, \alpha = 3$
- $\epsilon_L \sim L^{-z}$



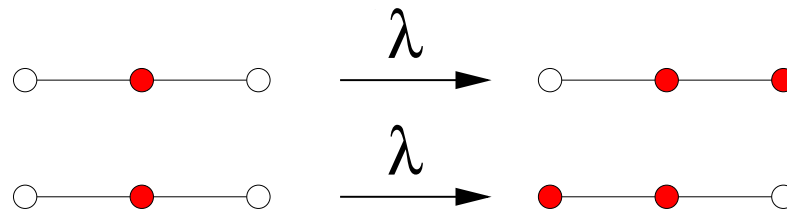
$$z_c = \alpha$$



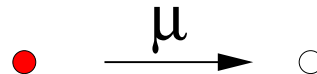
$$\mu(L) \sim (\ln L)^2$$

# A kontakt-folyamat

- egyszerű járványterjedési modell (Harris, 1974)
- rácshelyek két állapota: aktív/inaktív (fertőzött/egészséges)
- folytonos idejű Markov-folyamat a következő átmenetekkel:
  1. aktív rácshelyek aktiválják szomszédait  $\lambda$  rátával



2. aktív rácshelyek  $\mu$  rátával inaktívvá válnak ( $\mu = 1$ )



## Állandósult állapot

- kontroll-paraméter:  $\lambda$
- rendparaméter: az aktív rácshelyek hányada az állandósult állapotban ( $\rho$ )
- $\lambda < \lambda_c$ : inaktív fázis,  $\rho = 0$  (abszorbeáló állapot)  
 $\lambda > \lambda_c$ : aktív fázis,  $\rho = \rho(\lambda) > 0$
- $\lambda = \lambda_c$  pontban folytonos fázisátalakulás  $\rho(\lambda) \sim (\lambda - \lambda_c)^\beta$  ( $\lambda \rightarrow \lambda_c$ )
- irányított perkoláció univerzalitási osztálya; felső kritikus dimenzió:  $d_u = 4$

# A kontakt-folyamat

## Hosszú hatótávolságú kontakt-folyamat

Janssen et al. 1998; Hinrichsen, Howard 1998

- $\lambda(l_{ij}) = \Lambda l_{ij}^{-(d+\sigma)}$ 
  - a)  $0 < \sigma < \sigma_{MF} = d/2$ : átlagtér-viselkedés
  - b)  $\sigma_{MF} < \sigma < \sigma_{RH}$ :  $\sigma$ -val folytonosan változó kritikus exponensek
  - c)  $\sigma > \sigma_{RH}$ : rövid hatótávolságú viselkedés

## A rendezetlen kontakt-folyamat

Noest 1986

- helytől függő, véletlen ráták:  $\lambda_i, \mu_i$

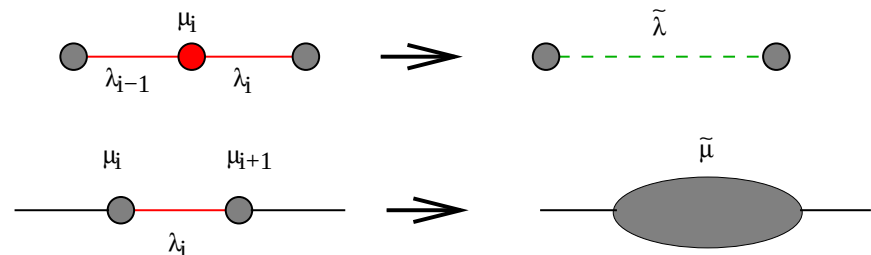
- SDRG módszer

$$\begin{aligned} \text{a) } \Omega = \mu_i & \quad \tilde{\lambda} \simeq \frac{\lambda_{i-1} \lambda_i}{\Omega} \\ \text{b) } \Omega = \lambda_i & \quad \tilde{\mu} \simeq 2 \frac{\mu_i \mu_{i+1}}{\Omega} \end{aligned}$$

$$\lambda \leftrightarrow J$$

$$\mu \leftrightarrow h$$

RTIM univerzalitási osztálya



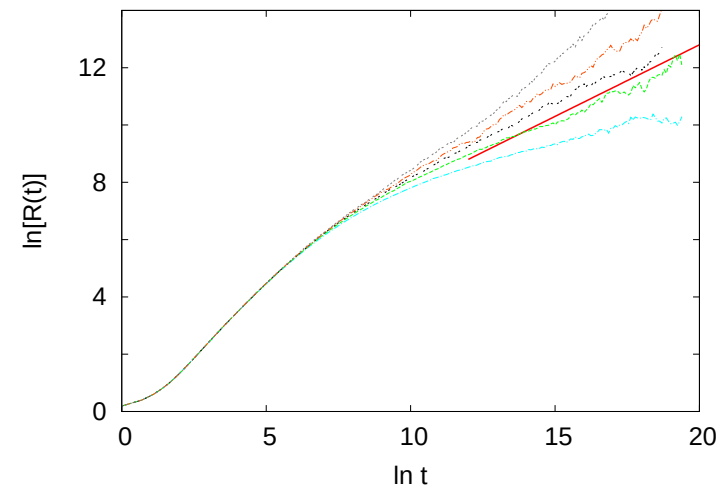
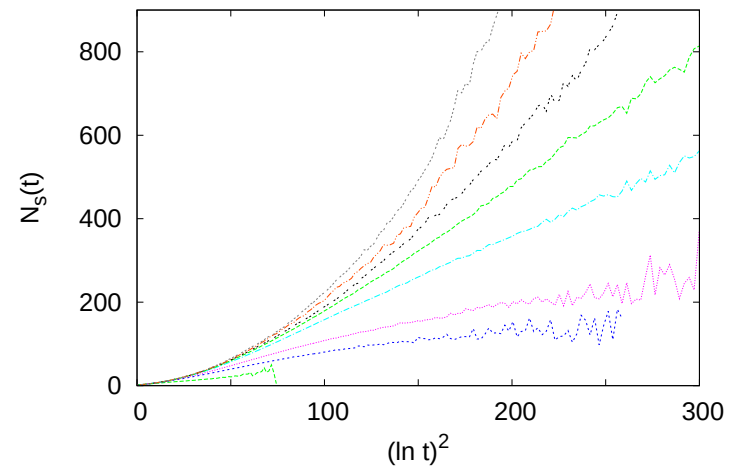
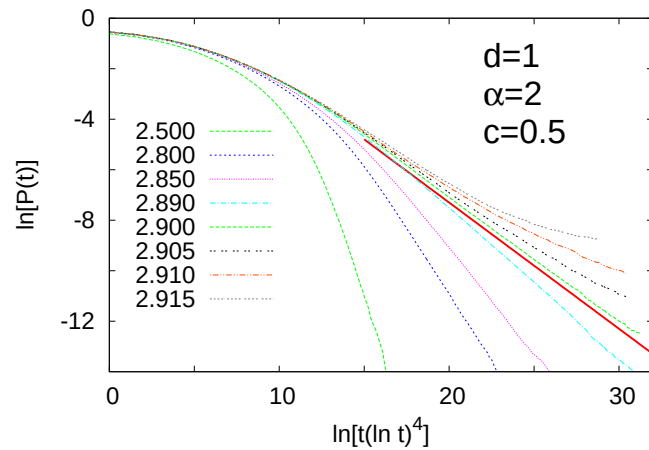
Hooyberghs, Iglói, Vanderzande, 2002

# A rendezetlen h.h. kontakt-folyamat

- $\lambda(l_{ij}) = \Lambda_{ij} l_{ij}^{-\alpha}$        $\Lambda_{ij}, \mu_i$  véletlen változók
- SDRG eljárás: a kvantum-Ising-modellével azonos, erősen rendezetlen fixpont írja le a kritikus viselkedést.
- Az átlagos dinamikai mennyiségek viselkedése az SDRG eredményekből kapható:
  - túlélési valószínűség:  $P(t) \sim [t(\ln t)^4]^{-\frac{d}{\alpha}}$
  - aktív rácshelyek átlagos száma:  $N_s(t) \equiv \frac{N(t)}{P(t)} \sim (\ln t)^2$
  - kiterjedés:  $R(t) \sim [t(\ln t)^{4-2\alpha/d}]^{\frac{1}{\alpha}}$
- Monte Carlo szimuláció az egy- és kétdimenziós modellben.  
A rácshelyek  $c$  hányada passzív (“hígítás”).  
 $L = 10^9$  (1d)  
 $L = 40000$  (2d)

*RJ, I.A. Kovács, F. Iglói, Phys. Rev. E **91**, 032815 (2015)*

# Monte Carlo szimuláció



- $\alpha > \alpha_{MF} = \frac{3d}{2}$

$$P(t) \sim [t(\ln t)^4]^{-\frac{d}{\alpha}}$$

$$N_s(t) \sim (\ln t)^2$$

$$R(t) \sim [t(\ln t)^{4-2\alpha/d}]^{\frac{1}{\alpha}}$$

- $\alpha < \alpha_{MF} = \frac{3d}{2}$

- átlagtér kritikus viselkedés
- nincs Griffiths-fázis

- Rendezetlen, hosszú hatótávolságú modellek (kvantum-Ising-modell, kontakt-folyamat) kritikus viselkedését egy erősen rendezetlen fixpont írja le.
- A kölcsönhatás távolságfüggése ( $J(l) \sim l^{-\alpha}$ ) határozza meg a dinamikai relációt ( $\epsilon_L \sim L^{-\alpha}$ ).
- A kritikus dinamikai exponens véges:  $z_c = \alpha$ .
- Nyitott kérdések:
  - erősen rendezetlen viselkedés érvényességi tartománya
  - gyenge rendezetlenség

*Jelen kutatást a FuturICT.hu nevű, TÁMOP-4.2.2.C-11/1/KONV-2012-0013 azonosítószerű projekt támogatta az Európai Unió és az Európai Szociális Alap társfinanszírozása mellett.*

