

Fluktuáló terű transzverz Ising-lánc dinamikája

Roósz Gergő, Juhász Róbert, Iglói Ferenc

2016. szeptember 8.

Phys. Rev. B 93, 134305

$$\mathcal{H}(t) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{L-1} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - \frac{h(t)}{2} \sum_{i=1}^L \sigma_i^z ,$$

$h(t)$ -fluktuáló mágneses tér.

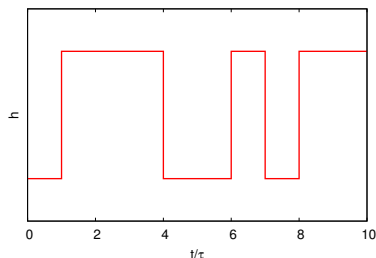
Hogyan terjednek jelek a zajos rendszerben?

Zajok típusai

- 1 fehér zaj
- 2 $1/f$ zaj
- 3 $1/f^\alpha$ zaj
- 4 dichotóm (két értékű) zaj

Modell

$$\mathcal{H}(t) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{L-1} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - \frac{h(t)}{2} \sum_{i=1}^L \sigma_i^z,$$



τ időnként érmét dobunk:

$h = h_A = +1$; $\frac{1}{2}$ valószínűséggel

$h = h_B = -1$; $\frac{1}{2}$ valószínűséggel

Hogyan terjednek jelek a zajos rendszerben?

Ekvivalens kvantum bolyongás

$$H = \begin{pmatrix} 0 & h & & & & \\ h & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & h & & \\ & & h & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & h \\ & & & & h & 0 \end{pmatrix}.$$

Ising modell

Clifford operátorok dinamikája.

$$\frac{d\hat{d}_i(t)}{dt} = -i \sum_{j=1}^{2L} H_{ij} \hat{d}_j(t)$$

Kvantumos bolyongás

A hullámfüggvény időfejlődése.

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = -i \sum_{j=1}^{2L} H_{ij} \psi_j(t)$$

Ekvivalens kvantum bolyongás

Ising modell

Clifford operátorok dinamikája.

$$\frac{d\hat{a}_l(t)}{dt} = -i \sum_{j=1}^{2L} H_{ij} \hat{d}_j(t)$$

$$A_l(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle x | \hat{d}_l(t) \hat{d}_L | x \rangle \sim \psi_l$$

A $|x\rangle$ állapot az x irányban polarizált. $\psi_l(0)$ az L és $L+1$ rácshelyekre lokalizált.

$$\sum_{l=1}^{2L} |A_l(t)|^2 = \text{const} = 1$$

$$\sigma^2(t) = \sum_{l=1}^L (l - l_0)^2 \left(|A_{2l-1}(t)|^2 + |A_{2l}(t)|^2 \right)$$

Vizsgált mennyiségek

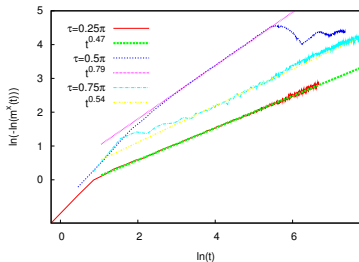
- 1 Átlagos mágnesezettség
- 2 Átlagos összefonódási entrópia
- 3 Hullámcsomag

Átlagos mágnesezettség

$$m_l^x(t) = \langle \Psi_0 | \sigma_l^x(t) | \Psi_1 \rangle$$

Közvetlen átlagolás (2000 realizáció).

$$m_l^x(t) \sim \exp(-ct^\alpha)$$



Átlagos összefonódási entrópia



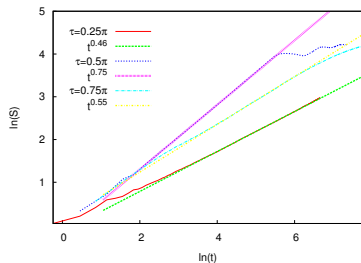
Egy adott realizáció esetében:

$$\rho = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$$

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho$$

$$S = -\text{Tr}_A \rho_A \ln \rho_A$$

$$S(t) \sim t^\beta$$



Exponensek

$$m_i^x(t) \sim \exp(-ct^\alpha)$$

$$S(t) \sim t^\beta$$

$\tau = \pi/2$	$t^{0.75}$
$\tau \neq \pi/2$	$t^{0.5}$

Mester egyenlet

$A_l(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle x | \hat{d}_l(t) \hat{d}_L | x \rangle$ - hullámfüggvény a kvantumoztatott bolyongásban

$$A_{ij}(t) = A_i^*(t) A_j(t)$$

Az első lépés során:

$$A_{ij}(\tau) = \sum_{k,l=1}^{2L} O_{ik}(n) O_{jl}(n) A_{kl}(t=0),$$

$$\begin{aligned} \overline{A_{ij}(t_n)} &= \sum_{k,l=1}^{2L} \overline{O_{ik}(n) O_{jl}(n)} \cdot \overline{A_{kl}(t_{n-1})} = \\ &= \sum_{k,l=1}^{2L} \frac{1}{2} \{ [O_1]_{ik} [O_1]_{jl} + [O_2]_{ik} [O_2]_{jl} \} \overline{A_{kl}(t_{n-1})}. \end{aligned}$$

Mester egyenlet

$$\overline{A_{ij}(t_n)} = \sum_{k,l=1}^{2L} \frac{1}{2} \{ [O_1]_{ik} [O_1]_{jl} + [O_2]_{ik} [O_2]_{jl} \} \overline{A_{kl}(t_{n-1})}.$$

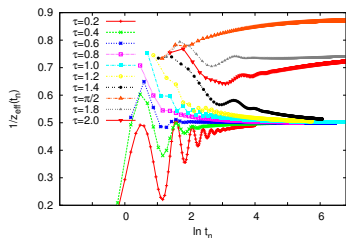
A hullámcsomag amplitúdója abszolút érték négyzetének várhatóértéke közvetlenül számítható!

$$p_l(t) \equiv \overline{|A_{2l-1}(t)|^2} + \overline{|A_{2l}(t)|^2}, \quad l = 1, 2, \dots, L.$$

$$\sigma^2(t) = \sum_{l=1}^L (l - l_0)^2 p_l(t),$$

$$\text{ahol } l_0 = \frac{L+1}{2}$$

Hullámcsomag

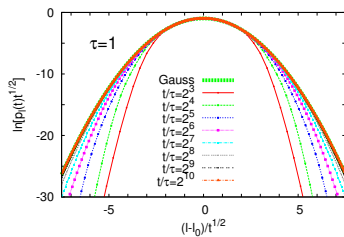


$$\sigma(t) \sim t^{1/z}$$

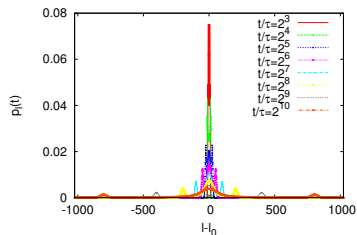
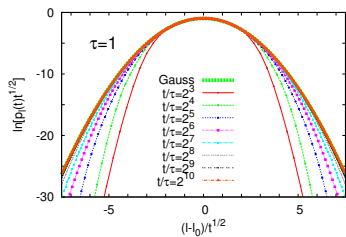
$$\frac{1}{z_{\text{eff}}(t_n)} = \frac{\ln[\sigma(t_n)/\sigma(t_{n-1})]}{\ln(t_n/t_{n-1})}$$

$\tau < \pi/2$	$1/z = 1/2$
$\tau = \pi/2$	$1/z = 7/8$
$\tau > \pi/2$	$1/z = 3/4$

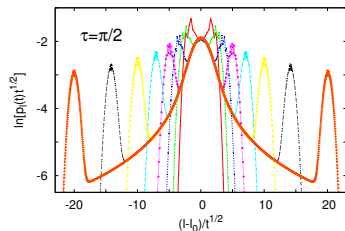
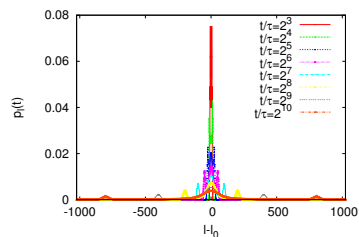
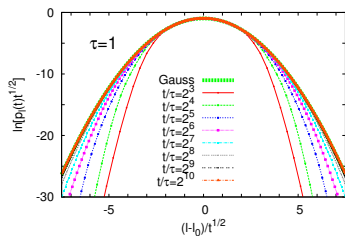
Hullámcsomag skálázás



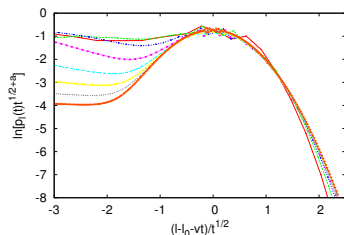
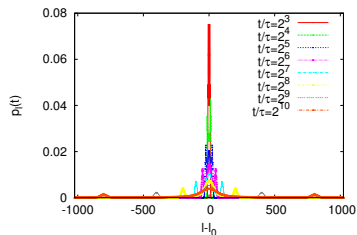
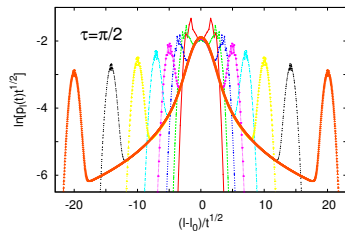
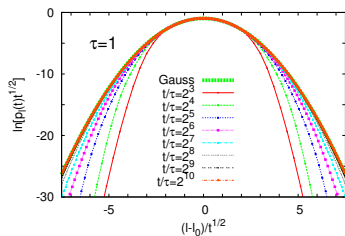
Hullámcsomag skálázás



Hullámcsomag skálázás



Hullámcsomag skálázás



Ballisztikus csúcsok

A szórás a kifutó ballisztikus csúcsok járuléka dominálja.

$$W(t) \sim t^{-a}$$

$$\sigma^2(t) \sim t^{2-a}$$

$\tau < \pi/2$	$z = 2$
$\tau \geq \pi/2$	$z = \frac{2}{2-a}$

Miért jelennek meg a ballisztikusan mozgó csúcsok?

Mi határozza meg az a exponenst?

$$H_A = \begin{pmatrix} 0 & h_A & & & & & \\ h_A & 0 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & h_A & & & \\ & & h_A & 0 & \cdots & & \\ & & & \cdots & \cdots & h_A & \\ & & & & h_A & 0 & \end{pmatrix} \quad H_B = \begin{pmatrix} 0 & h_B & & & & & \\ h_B & 0 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & h_B & & & \\ & & h_B & 0 & \cdots & & \\ & & & \cdots & \cdots & h_B & \\ & & & & h_B & 0 & \end{pmatrix}$$

Rezonáns állapotok

H_A -nak és H_B -nek általában nincsenek közös saját állapotai.

$$\begin{aligned}f_k^\pm(2n-1) &= \mathcal{N}e^{i\Theta_k}e^{ikn}, \\f_k^\pm(2n) &= \pm\mathcal{N}e^{-i\Theta_k}e^{ikn},\end{aligned}$$

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2}L^{-1/2}, \quad \tan 2\Theta_k = -\frac{\sin k}{h+\cos k}$$

$$\epsilon_k^\pm = \pm\sqrt{1+h^2+2h\cos k}.$$

$$f_{k,A}^\pm = \frac{1}{2}(e^{i\Delta_k} \pm e^{-i\Delta_k})f_{k,B}^+ + \frac{1}{2}(e^{i\Delta_k} \mp e^{-i\Delta_k})f_{k,B}^-,$$

$$\text{ahol } \Delta_k = \Theta_k^A - \Theta_k^B$$

Stroboszkópikus saját állapotok

H_A -nak és H_B -nek általában nincsenek közös saját állapotai.
De $U_A = \exp(-i\tau H_A)$ -nak és $U_B = \exp(-i\tau H_B)$ -nek vannak, ha

$$\epsilon_{k,B}^+ \tau = m_B \pi$$

vagy

$$\epsilon_{k,A}^+ \tau = m_A \pi$$

teljesül. (m_B és m_A pozitív egész.)

Rezonáns állapotok

H_A -nak és H_B -nek általában nincsenek közös saját állapotai.
De $U_A = \exp(-i\tau H_A)$ -nak és $U_B = \exp(-i\tau H_B)$ -nek vannak, ha

$$\epsilon_{k,B}^+ \tau = m_B \pi$$

vagy

$$\epsilon_{k,A}^+ \tau = m_A \pi$$

teljesül. (m_B és m_A pozitív egész.)

$\tau < \pi/2$ -re nincsenek közös sajátvektorok

$\tau \geq \pi/2$ -re vannak közös sajátvektorok, ezek következményeként jelennek meg a ballisztikus csúcsok.

Kiszóródási idő

A rezonáns közeli állapotok is lassan szóródnak ki.

Mennyire lassan?

Két dimenziós altér: $|f_{k,A}^+\rangle$ és $|f_{k,A}^-\rangle$.

$$|f(t_n)\rangle = F_1(t_n)|f_{k,A}^+\rangle + F_2(t_n)|f_{k,A}^-\rangle$$

Tegyük fel, hogy a kezdeti állapot $|f_{k,A}^+\rangle$.

Annak valószínűsége, hogy n lépés után is ebben az állapotban van a rendszer:

$$P_k^+(t) \equiv |\langle f_{k,A}^+ | f(t) \rangle|^2.$$

Kiszóródási idő

$$U_A = \begin{bmatrix} e^{-i\epsilon_{k,A}^+} & 0 \\ 0 & e^{i\epsilon_{k,A}^+} \end{bmatrix}, \quad U_B = \begin{bmatrix} \omega_k^* & -\gamma_k \\ \gamma_k & \omega_k \end{bmatrix},$$

Definiáljuk: $F_{ij}^{(n)} \equiv \overline{F_i^*(t_n)F_j(t_n)}$, $i, j = 1, 2$

Mester egyenlet ebben az altérben:

$$F_{ij}^{(n)} = \sum_{k,l=1}^2 \frac{1}{2} \{ [U_A^*]_{ik} [U_A]_{jl} + [U_B^*]_{ik} [U_B]_{jl} \} F_{kl}^{(n-1)}.$$

Bevezetve a $\overline{U} \equiv \frac{1}{2}(U_A^* \otimes U_A + U_B^* \otimes U_B)$ jelölést a mester egyenlet:

$$F^{(n)} = \overline{U} F^{(n-1)}.$$

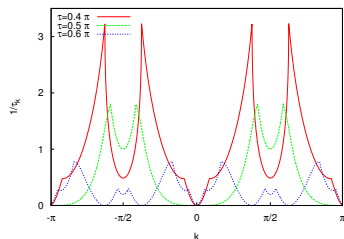
Kiszóródási idő

\bar{U} -nak mindig van egy egységnyi sajátértékhez tartozó sajátvektora: Az aszimptotikus állapot.

A kiszóródás gyorsaságát a második legnagyobb sajátérték (r_k) adja meg:

$$P_k^+(t_n) - P_k^+(\infty) \sim r_k^n \sim e^{-t_n/\tau_k},$$

Kiszóródási idő



A rezonáns móduszok közelében:
 $1/\tau_k \sim (k - k_0)^{n_{k_0}}$

$$W_{k_0}(t) \sim \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{-t/\tau_k} dk \sim \\ \sim \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{-tC(k-k_0)^{n_{k_0}}} dk \sim t^{-1/n_{k_0}},$$

Összefoglalás

$\tau < \pi/2 \rightarrow$ nincs ballisztikus módusz \rightarrow diffuzív $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}$

Összefoglalás

$\tau < \pi/2 \rightarrow$ nincs ballisztikus módusz \rightarrow diffuzív $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}$

$\tau > \pi/2 \rightarrow$ van ballisztikus módusz. A szórást a ballisztikus módusz határozza meg.

$$\tau = n\frac{\pi}{2} \quad W \sim t^{-1/4} \quad a = 1/4 \quad \frac{1}{z} = \frac{2}{2-a} = \frac{7}{8}$$

Összefoglalás

$\tau < \pi/2 \rightarrow$ nincs ballisztikus módusz \rightarrow diffuzív $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}$

$\tau > \pi/2 \rightarrow$ van ballisztikus módusz. A szórást a ballisztikus módusz határozza meg.

$$\begin{array}{llll} \tau = n\frac{\pi}{2} & W \sim t^{-1/4} & a = 1/4 & \frac{1}{z} = \frac{2}{2-a} = \frac{7}{8} \\ \tau \neq n\frac{\pi}{2}, \tau > \frac{\pi}{2} & W \sim t^{-1/2} & a = 1/2 & \frac{1}{z} = \frac{2}{2-a} = \frac{3}{4} \end{array}$$

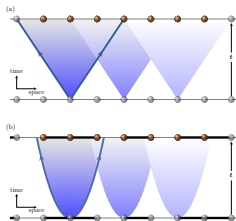
Összefoglalás

$\tau < \pi/2 \rightarrow$ nincs ballisztikus módusz \rightarrow diffuzív $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}$

$\tau > \pi/2 \rightarrow$ van ballisztikus módusz. A szórást a ballisztikus módusz határozza meg.

$$\begin{array}{llll} \tau = n\frac{\pi}{2} & W \sim t^{-1/4} & a = 1/4 & \frac{1}{z} = \frac{2}{2-a} = \frac{7}{8} \\ \tau \neq n\frac{\pi}{2}, \tau > \frac{\pi}{2} & W \sim t^{-1/2} & a = 1/2 & \frac{1}{z} = \frac{2}{2-a} = \frac{3}{4} \end{array}$$

Megjegyzés: A mágnesezettségre és az entrópiára vonatkozó eredmények is visszavezethetők a bolyongásra, un. kváziklasszikus módszerrel.



Köszönöm a figyelmet!

Jelen kutatást az OTKA K109577 számú projekt, és a TÁMOP-4.2.2B-15/1/KONV-2015-2016 projekt támogatta.