Entrópiák és divergenciák

Pitrik József

Analízis Tanszék, BME

Analízis - Elméleti fizika közös szeminárium, Szeged

Tartalom

Hogyan nyerjünk a TOTÓ-n?

biztos telitalálat $\Longleftrightarrow$ minden lehetséges kimenetelre fogadunk
Hány szelvényt töltsünk ki, ha megelégszünk pl. $p = 0,95$ valószínűségi nyeréssel?

Modell

n mérkőzés, eredményük egymástól független

$$\mathrm{P}rob(\text{pályaválasztó nyer}) = p_1$$
$$\mathrm{P}rob(\text{vendég nyer}) = p_2$$
$$\mathrm{P}rob(\text{döntetlen}) = p_3$$

A győztes szelvény egy n hosszúságú $1, 2, x$ sorozat, melyben minden tipp egymástól függetlenül p_1, p_2, p_3 valószínűségű.

Cél: viszonylag kevés sorozat kiválasztása úgy, hogy annak a valószínűsége, hogy a végeredmény ezek között legyen ~ 1.

Nagy számok (gyenge) törvénye:

m.m. sorozat $\sim n \cdot p_1$ db 1-t, $\sim n \cdot p_2$ db 2-t és $\sim n \cdot p_3$ db X-t tartalmaz: tipikus sorozat
Ha n elég nagy, elég a tipikus sorozatokat megtenni:
tipikus sorozatok száma = elég ennyi szelvényt venni

Kérdés: Hány tipikus sorozat van?

Egy rögzített tipikus sorozat megvalósulásának valószínűsége:

$$p_1^{n \cdot p_1} \cdot p_2^{n \cdot p_2} \cdot p_3^{n \cdot p_3}$$

Mivel a tipikus sorozatok összvalószínűsége ~ 1, ezért a tipikus sorozatok száma:

$$\sim \frac{1}{p_1^{n \cdot p_1} \cdot p_2^{n \cdot p_2} \cdot p_3^{n \cdot p_3}} = 2^{n \cdot H},$$

ahol

$$H = -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2 - p_3 \log_2 p_3.$$

$X = \{x_1, x_2, \dots\}$ véges, vagy megszámlálhatóan végtelen
ξ valószínűségi változó X-en, $\mathrm{P}rob(\xi = x_j) = p(x_j)$, $j = 1, 2, \dots$

$$H(\xi) = -\sum_j p(x_j) \log p(x_j)$$ Shannon-entrópia

(konvenció: $0 \log 0 = 0$)

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{|A|}\}$: ABC (TOTÓ-nál: 1,2,X)
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$: n hosszúságú szimbólumsorozat (tipp)
$N(a|\mathbf{x})$: a szimbólum ennyiszer szerepel $\mathbf{x}$ sorozatban

$$P_{\mathbf{x}}(a) = \frac{N(a|\mathbf{x})}{n} \quad a \text{ relatív gyakorisága } \mathbf{x} \text{ sorozatban}$$

$P_{\mathbf{x}}$: tipus (val. eloszlás A-n)
$\mathcal{P}_n$: típusok halmaza. Ha $P \in \mathcal{P}_n$, akkor

$$T(P) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{A^n} : \mathbf{P_x} = \mathbf{P}\} \quad \mathbf{P} \text{ típusosztályú sorozatok}$$

Tétel

Ha $P \in \mathcal{P}_n$, akkor

$$\frac{1}{(n+1)^{|A|}} 2^{nH(P)} \leq |T(P)| \leq 2^{nH(P)}.$$

Megjegyzés

Ha a $T(P)$-beli tipikus sorozatokat meg akarjuk jelölni különböző, azonos hosszúságú $0-1$ sorozatokkal (kódolás), akkor elég $\sim nH(P)$ hosszúságú sorozatokat használni $\Longrightarrow$ „a véletlen sorozat egyes tagjainak megnevezéséhet $H(\xi)$ bit szükséges.

Pontosabban

X val. változó véges $\mathcal{X}$ halmazon, $\mathrm{P}rob(X = x) = p(x)$.
C: $\mathcal{X}$ leképezése $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, \dots, d-1\}$ ABC véges hosszúságú sorozataira: forráskódolás
$C(x)$: kódszó, hossza: $\ell(x)$, $(x \in \mathcal{X})$

$$L(C) := \sum_x p(x)\ell(x)$$

Egyértelműen dekódolható kódokra:

$$H(p(x)) \leq L(C) \leq H(p(x)) + 1,$$

ahol $H(p(x)) = -\sum_x p(x) \log p(x)$.

Ha nem ismerjük X v.v. pontos p eloszlását, és helyette q eloszlással dolgozunk $\mathcal{X}$-en:

$$H(p) + D(p||q) \leq L(C) \leq H(p) + D(p||q) + 1,$$

ahol

$$D(p||q) = \sum_x p(x)(\log p(x) - \log q(x)), \quad \text{relatív entrópia}$$

Kvantumrendszer matematikai modellje

Rendszer $\longleftrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, $(dim\mathcal{H} = d)$
Állapot: $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ pozitív lineáris funkcionál, $\varphi(I) = 1$
$\hookrightarrow \varphi(X) = \operatorname{Tr} \rho X, \quad (X \in \mathcal{A})$ egyértelműen, ahol $\rho \geq 0, \operatorname{Tr} \rho = 1$.
Rendszer állapotai $\leftrightarrow \rho$ sűrűségi operátorok
Állapottér $\mathcal{H}$ Hilbert-téren:

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \{\rho \in B(\mathcal{H}) : \rho \geq 0, \operatorname{Tr} \rho = 1\}$$

- $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ konvex
- $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ extremális pontjai=tiszta állapotok ($\rho^2 = \rho$, 1-rangú projekciók: $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, valamely $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$-ra)

Neumann-entrópia, Rényi-entrópia

Neumann-entrópia

$$S(\rho) = -\mathrm{Tr}\,\rho\log\rho, \quad \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$$

Ha ρ sajátértékei $\lambda_1, \dots \lambda_d$, akkor $S(\rho) = -\sum_{i=1}^{d} \lambda_i \log \lambda_i$.

kvantum Rényi-entrópia

$$S_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \ln \mathrm{Tr}\,\rho^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\lim_{\alpha\to1} S_\alpha = S(\rho) = -\mathrm{Tr}\,\rho\ln\rho$$

Együttes nevük: α-entrópiák.

Tulajdonságok

1. $S_\alpha(\rho) \geq 0$, egyenlőség pontosan akkor, ha ρ tiszta.
2. Konkavitás

$$S_\alpha(t\rho + (1-t)\sigma) \geq tS_\alpha(\rho) + (1-t)S_\alpha(\sigma),$$

   $t \in [0,1]$, akkor és csak akkor, ha $\alpha \in [0,1]$.
3. Unitér ekvivalencia

$$S_\alpha(U\rho U^*) = S_\alpha(\rho), \quad \text{minden } U \text{ unitérre.}$$

Példa: az entrópia, mint a 'kevertség' mértéke

Cél: rendezést bevezetni az állapottéren

- bázisfüggetlen legyen $\Rightarrow$ csak ρ sajátértékeitől függhet
- a tiszta állapotok legyenek a „legrendezettebbek"

Rendezzük ρ sajátértékeit csökkenő sorrendbe:

$$\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots), \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots, \quad \sum_i \lambda_i = 1$$

$$\rho(n) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sup_{\mathcal{H}_n} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_n} \rho$$

Azt mondjuk, hogy ρ kevertebb σ-nál, ha

$$\rho(n) \leq \sigma(n), \quad \forall n.$$

Jel: $\rho \succeq \sigma$.

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1/n & & & \\ & 1/n & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/n \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0.$$

- $\succeq$ parciális rendezés
- $\succeq$ kompatibilis a konvexitással:

$$\rho \succeq \mu, \quad \rho \succeq \nu \quad \Rightarrow \rho \succeq \alpha\mu + (1-\alpha)\nu, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Tétel (Wehrl)
Ha $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ konvex és $f(0) = 0$, akkor

$$\rho \succeq \frac{f(\rho)}{\operatorname{Tr} f(\rho)}.$$

Példa (Gibbs-állapot)

$$\rho_\beta = \frac{e^{-\beta H}}{\operatorname{Tr} e^{-\beta H}}, \quad (\beta = \frac{1}{kT}, H \geq 0)$$

Mivel

$$f(x) := x^{\frac{\beta'}{\beta}}, \quad \beta' > \beta, (T' < T)$$

konvex és $f(0) = 0$, ezért

$$\rho_\beta \succeq \rho_{\beta'},$$

vagyis a magasabb hőmérséklethez tartozó Gibbs-állapot kevertebb.

$\succeq$ hasznos karakterizációi:

1. $A \in B(\mathcal{H})$ obszervábilis varianciája ρ állapotban
$$(\Delta_\rho A)^2 = \operatorname{Tr} \rho A^2 - (\operatorname{Tr} \rho A)^2.$$
Ekkor
$$\rho \succeq \sigma \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta_\rho A \geq \Delta_\sigma A, \quad \forall A \in B(\mathcal{H}).$$
2. $\rho \succeq \sigma$ pontosan akkor, ha $\operatorname{Tr} f(\rho) \geq \operatorname{Tr} f(\sigma)$ minden f konkáv függvényre.

Elvárások egy S kevertségi mértéktől:

- Tiszta állapotokra 0 legyen.
- $\rho \succeq \sigma \quad \implies \quad S(\rho) \geq S(\sigma)$
- független rendszerekre additív legyen:

$$S(\rho \otimes \sigma) = S(\rho) + S(\sigma)$$

Belátható, hogy ezen elvárásoknak megfelelnek az α-entrópiák:
kvantum Rényi-entrópia

$$S_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \ln \operatorname{Tr} \rho^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

Neumann-entrópia

$$\lim_{\alpha \to 1} S_\alpha = S(\rho) = -\operatorname{Tr} \rho \ln \rho$$

Összetett rendszer

Legyen '12' összetett rendszer, azaz adott

1. $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ Hilbert tér
2. $\rho_{12} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{12}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ sűrűségi mátrix

Ekkor a ρ_1 ill. ρ_2 redukált állapotok $\mathcal{H}_1$-n ill. $\mathcal{H}_2$-n, ha:

$$\mathrm{Tr}\,(\rho_1 X) = \mathrm{Tr}\,(\rho_{12}(X \otimes I)) \quad \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1),$$

$$\mathrm{Tr}\,(\rho_2 Y) = \mathrm{Tr}\,(\rho_{12}(I \otimes Y)) \quad \forall Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2).$$

Belátható, hogy

$$\rho_1 = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_2}\rho_{12}, \quad \rho_2 = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_1}\rho_{12}$$

Megjegyzések

1. Egy összetett rendszer részrendszerei akkor és csak akkor függetlenek, ha az állapot a marginálisainak szorzata, azaz

$$\rho_{12} = \rho_1 \otimes \rho_2 .$$

2. Ha ρ_1 és ρ_2 közül legalább az egyik tiszta $\Longrightarrow \rho_{12} = \rho_1 \otimes \rho_2$
3. Állapottisztítás:
   Bármely $\rho_1 \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1)$ állapothoz létezik $\mathcal{H}_2$ Hilbert-tér és $\Psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, hogy

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_2} |\Psi\rangle\langle\Psi| = \rho_1 .$$

4. Ha ρ_{12} tiszta, akkor ρ_1 és ρ_2 spektruma multiplicitásokkal együtt megegyezik, kivéve esetleg a 0 sajátértéket.

$\mathcal{B}(\mathcal{H}_{12}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$-n két természetes pozitív kúp van:

1. $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{12})^+ = \{X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{12}) : X \geq 0\}$
2. $\mathcal{P} = \{\sum_i X_i \otimes Y_i : X_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)^+, Y_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)^+\}$

Természetesen:

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_{12})^+.$$

- $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{12}) \cap \mathcal{P}$ szeparábilis állapotok (szorzatállapotok konvex kombinációja)
- A többi állapot: összefonódott állapot

Tiszta állapot pontosan akkor szeparábilis, ha szorzatállapot.

Összetett rendszerek entrópiája

Tétel (Araki, Lieb)
S_α akkor és csak akkor szubadditív, ha $\alpha = 1$. Ekkor

$$|S(\rho_1) - S(\rho_2)| \leq S(\rho_{12}) \leq S(\rho_1) + S(\rho_2),$$

és a jobboldali egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, ha $\rho_{12} = \rho_1 \otimes \rho_2$.

Megjegyzések

1. Ha ρ_{12} tiszta, akkor $S_\alpha(\rho_1) = S_\alpha(\rho_2)$.
2. Mivel $S_\alpha(\rho)$ nem szubadditív, ezért nem feltétlenül igaz, hogy $\rho_1 \otimes \rho_2 \succeq \rho_{12}$.
3. Szeparábilis állapotok esetén

   $$S_\alpha(\rho_{12}) \geq S_\alpha(\rho_1), \quad S_\alpha(\rho_{12}) \geq S_\alpha(\rho_2).$$

   Sőt tiszta szeparábilis állapotokra elégséges is a feltétel.
4. Ha $S_\alpha(\rho_{12}) < S_\alpha(\rho_1)$, akkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden σ állapot, melyre $\|\sigma - \rho_{12}\| < \varepsilon$ összefonódott.

Tétel (Lieb, Ruskai)
A Neumann-entrópa erősen szubadditív, azaz

$$S(\rho_{123}) + S(\rho_2) \leq S(\rho_{12}) + S(\rho_{23}).$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha ρ_{123} un. kvantum Markov-állapot.

Állapottranszformációk (Kvantumcsatornák)

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ C^*-algebrák (Kvantumrendszerek)
$\Phi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ lineáris leképezés:

- pozitív, ha $\Phi(A^*A) \geq 0$, $(A \in \mathcal{A}_1)$
- n-pozitív, ha $\Phi \otimes id : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pozitív

Bármely fizikai folyamat a kvantumrendszeren: kvantumcsatorna
Matematikailag: kvantumcsatorna = teljesen pozitív, nyomtartó lineáris leképezés (CPTP)

Tétel

$\mathcal{A}_i = \mathcal{B}(\mathcal{H}_i) = \mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{C})$, $(i = 1, 2)$. $\Phi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ lineáris leképezés esetén az alábbiak ekvivalensek:

1. Φ teljesen pozitív
2. Choi-reprezentáció
   $\sum_{i,j=1}^{d_1} E_{ij} \otimes \Phi(E_{ij}) \geq 0$, ($E_{ij}$: mátrixegységek)
3. Kraus-reprezentáció
   $\exists V_i : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ $(I = 1, \ldots, r)$ lineáris operátorok, hogy
   $\Phi(A) = \sum_i^r V_i A V_i^*$
4. Stinespring-representation
   $\exists \mathcal{K}$ véges dimenziós Hilbert-tér, $\pi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ *-homomorfizmus, $V : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{K}$ izometria, hogy
   $\Phi(A) = V^* \pi(A) V$, $(A \in \mathcal{A}_1)$.

Példák kvantumcsatornákra

1. Unitér fejlődés: $U\rho U^*$.
2. Általánosított mérés (POVM):

$$\sum_i M_i^* M_i = I, \quad \rho \mapsto \rho_i = \frac{M_i \rho M_i^*}{\operatorname{Tr}(M_i \rho M_i^*)}$$

   $p_i = \operatorname{Tr}(M_i \rho M_i^*)$ valószínűséggel.
3. Projektív mérés:
   A obszervábilis spektrális felbontása: $A = A^* = \sum_i \lambda_i P_i \Longrightarrow \sum_i P_i = I$
4. Csatolás

$$\rho \mapsto \rho \otimes \sigma.$$

5. parciális nyomképzés

Néhány divergencia

Relatív entrópia (Umegaki)

$$S(\rho||\sigma) = \begin{cases} \mathrm{Tr}\,\rho(\ln\rho - \ln\sigma), & \text{ha } \mathrm{supp}\rho \subseteq \mathrm{supp}\sigma, \\ +\infty, & \text{különben.} \end{cases}$$

1. $S(\rho||\sigma) \geq 0$, egyenlőség pontosan akkor, ha $\rho = \sigma$.
2. Unitér invariancia

$$S(U\rho U^*||U\sigma U^*) = S(\rho||\sigma) \quad \text{minden } U \text{ unitérre}$$

3. Együttesen konvex: minden $t \in [0,1]$ esetén

$$S(t\rho_1 + (1-t)\rho_2||t\sigma_1 + (1-t)\sigma_2) \leq tS(\rho_1||\sigma_1) + (1-t)S(\rho_2||\sigma_2).$$

Rényi-féle α-relatív entrópia

$$S_\alpha(\rho||\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \log \operatorname{Tr} \rho^\alpha \sigma^{1-\alpha}, & \text{ha } \mathrm{supp}\rho \subseteq \mathrm{supp}\sigma, \text{ vagy } 0 \leq \alpha < 1, \\ +\infty, & \text{ha } \mathrm{supp}\rho \nsubseteq \mathrm{supp}\sigma, \text{ vagy } \alpha > 1, \end{cases}$$

„Az állapotok megkülönböztethetősége nem nőhet fizikai folyamat következtében."

Tétel (Lindblad,Uhlmann;Petz)

ρ, σ állapotok $\mathcal{A}_1$-en, $\Phi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ kvantumcsatorna. Ekkor

$$S(\Phi\rho||\Phi\sigma) \leq S(\rho||\sigma),$$

illetve

$$S_\alpha(\Phi\rho||\Phi\sigma) \leq S_\alpha(\rho||\sigma).$$

Példa

$\rho, \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, $F_x \in B(\mathcal{H})$ pozitívak, $\sum_x F_x = I_{\mathcal{H}}$.
Mérés következtében:

$$p(x) = \operatorname{Tr} \rho F_x, \quad q(x) = \operatorname{Tr} \sigma F_x$$

Ekkor:

$$S(\rho||\sigma) \geq D(p(x)||q(x)).$$

Példa: Hogyan magyarázzuk ki a II. főtételt?

- vizsgált rendszer $\longrightarrow$ $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, ρ állapot
- környezet $\longrightarrow$ $\mathcal{H}_e$ Hilbert-tér, σ állapot

Ha $\mathcal{H}_e$ elég nagy, akkor $\sigma = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ vehető (állapottisztítás).
$\hookrightarrow$ Az összetett rendszer (zárt) szorzatállapotú: $\rho \otimes |\Psi\rangle\langle\Psi|$.
$\hookrightarrow$ Zárt rendszer unitér módon fejlődik: $U_t(\rho \otimes |\Psi\rangle\langle\Psi|)U_t^*$.

$$\rho_t = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_e}(U_t(\rho \otimes |\Psi\rangle\langle\Psi|)U_t^*) = \sum_i A_i \rho A_i^*,$$

alkalmas A_i-kre.

Az egész processzust Φ-vel jelölve, tetszőleges σ referenciaállapotra:

$$S(\Phi\rho||\Phi\sigma) \leq S(\rho||\sigma).$$

Szoritkozzunk $\dim \mathcal{H} = n$-re (megy általánosan is) és legyen $\sigma = \frac{1}{n}I$. Ekkor $\Phi(\sigma) = \sigma$.

$$\begin{aligned} S(\Phi\rho||\Phi\sigma) &= S(\rho_t||I/n) = \operatorname{Tr}\rho_t(\ln\rho_t - \ln(I/n)) \\ &\leq S(\rho||I/n) = \operatorname{Tr}\rho(\ln\rho - \ln(I/n)), \end{aligned}$$

azaz

$$\operatorname{Tr}\rho_t \ln\rho_t \leq \operatorname{Tr}\rho\ln\rho,$$

vagyis

$$S(\rho_t) \geq S(\rho).$$

Példa: összefonódás relatív entrópiája

Jelöljük $\mathcal{S}^{sep}(\mathcal{H}_{12})$-vel a szeparábilis állapotok terét $\mathcal{H}_{12}$-n.

$$E_{RE}(\rho_{12}) := \inf\{S(\rho_{12}||\sigma) : \sigma \in \mathcal{S}^{sep}(\mathcal{H}_{12})\}$$

megadja a ρ_{12} szeparábilis állapotoktól való „távolságát".
Belátható, hogy az infimum felvétetik és egyértelmű $\longrightarrow$ ρ_{12} legjobb szeparábilis approximációja.
Tétel (Vedral et al.)

$$E_{RE}(\rho_{12}) \geq \max\{S(\rho_1) - S(\rho_{12}), S(\rho_2) - S(\rho_{12})\}.$$

Ha ρ_{12} tiszta, akkor $E_{RE}(\rho_{12}) = S(\rho_1)$.

Példa: kvantum hipotézisvizsgálat

Milyen hibákat követhetünk el egy ítélet meghozatalakor?

IGAZSÁG			
		nem bűnös	bűnös
DÖNTÉS	bűnös	I. fajú hiba	OK
	nem bűnös	OK	II. fajú hiba

Hogyan tudunk megkülönböztetni két állapotot?

- ρ_0 null hipotézis
- ρ_1 alternatív hipotézis
- $0 \le T \le I$ teszt operátor, $\{T, I - T\}$ két értékű mérés

$T \longrightarrow \rho_0$ elfogadása

$I - T \longrightarrow \rho_1$ elfogadása

Ha 0-t mérünk, ρ_0-t fogadjuk el, különben ρ_1-et.

Milyen hibákat követhetünk el?

- elsőfajú hiba: null hipotézis igaz, de az alternatívat választjuk. Valószínűsége:
$$\alpha[T] = \mathrm{Tr}\,\rho_0(I - T).$$
- másodfajú hiba: alternatív hipotézis igaz, de a null hipotézist választjuk. Valószínűsége:
$$\beta[T] = \mathrm{Tr}\,\rho_1 T.$$

Vegyük az állapotok független kópiáit $\mathcal{H}^{\otimes n}$-en:

$$\rho_0^{(n)} = \rho_0 \otimes \rho_0 \otimes \cdots \otimes \rho_0, \quad \rho_1^{(n)} = \rho_1 \otimes \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_1,$$

tekintsük ezeken a $T_n \in \mathcal{A}^{\otimes n} = \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\otimes n})$ tesztet, vagyis a $(T_n, I - T_n)$ $\{0, 1\}$ mérést a $(\rho_0^{(n)}, \rho_1^{(n)})$ hipotézis páron. A hibavalószínűségek:

$$\alpha[T_n] = \operatorname{Tr} \rho_0^{(n)}(I - T_n), \quad \beta[T_n] = \operatorname{Tr} \rho_1^{(n)} T_n.$$

Cél: minimalizálni a hibavalószínűséget, és az aszimptotikáról mondani valamit n függvényében.

1. Stein-típus
   Adott $\varepsilon \in (0,1)$ esetén minimalizálni $\beta[T_n]$-t, $\alpha[T_n] \leq \varepsilon$ feltétel mellett:
   $$\beta^S_{n,\varepsilon} := \min\{\beta[T_n] : \alpha[T_n] \leq \varepsilon, T_n \in \mathcal{A}^{\otimes n}, 0 \leq T_n \leq I\}$$
2. Csernov-típus
   Adott $(p, 1-p)$ valószínűségeloszlás esetén
   $$\beta^C_{n,p} := \min\{p \cdot \alpha[T_n] + (1-p) \cdot \beta[T_n] : T_n \in \mathcal{A}^{\otimes n}, 0 \leq T_n \leq I\}$$
3. Hoeffding-típus
   Adott $r > 0$ esetén minimalizálni $\beta[T_n]$-t, azzal a feltétellel, hogy $\alpha[T_n]$ e^{-nr} rendben csökkenjen:
   $$\beta^H_{n,r} := \min\{\beta[T_n] : \alpha[T_n] \leq e^{-nr}, T_n \in \mathcal{A}^{\otimes n}, 0 \leq T_n \leq I\}$$

Tétel

1. (kvantum Stein-lemma; Hiai, Petz.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \beta^S_{n,\varepsilon} = -S(\rho_0||\rho_1),$$

2. (kvantum Csernov-korlát; Audenaert, Nussbaum, Szkoła.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \beta^C_{n,p} = -C(\rho_0||\rho_1),$$

ahol

$$C(A||B) = \sup_{0\leq\alpha<1} \{(1-\alpha)S_\alpha(A||B)\} \quad \text{Csernov-távolság}$$

3. (kvantum Hoeffding-korlát; Hayashi, Nagaoka.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \beta^H_{n,r} = -H_r(\rho_0||\rho_1),$$

ahol

$$H_r(A||B) = \sup_{0\leq\alpha<1} \{-\frac{\alpha r}{1-\alpha} + S_\alpha(A||B)\} \quad \text{Hoeffding-távolság}$$

Irodalom

1. M. Ohya, D. Petz, Quantum Entropy and Its Use, Springer, 1993.
2. D. Petz, Quantum Information Theory and Quantum Statistics, Springer, 2010.
3. R. Alicki, M. Fannes, Quantum Dynamical Systems, Oxford Press, 2001.
4. W. Thirring, Quantum Mathematical Physics, Springer, 2002.

„Túléltük, bár igénybe vett."

(Cseh T.-Bereményi G.: Levél nővéremnek)

Köszönöm a figyelmet!