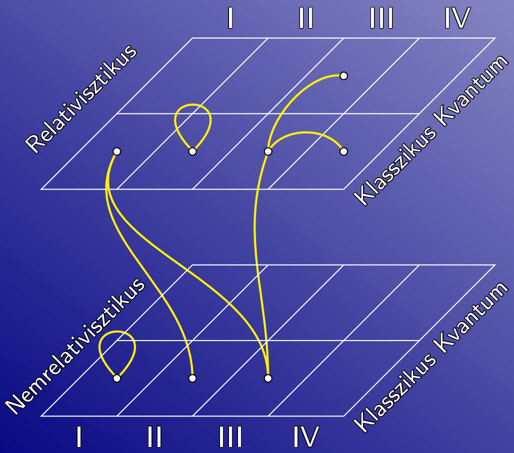
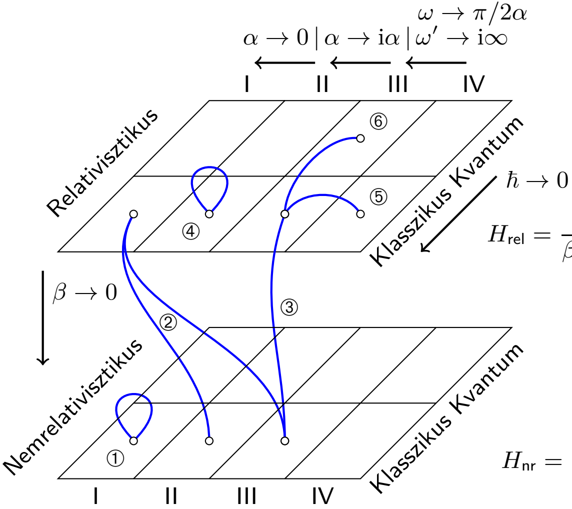
CALOGERO-RUIJSENAARS TÍPUSÚ INTEGRÁLHATÓ RENDSZEREK

Görbe Tamás Ferenc



Elméleti Fizika Szeminárium
Szeged, 2017. április 13.

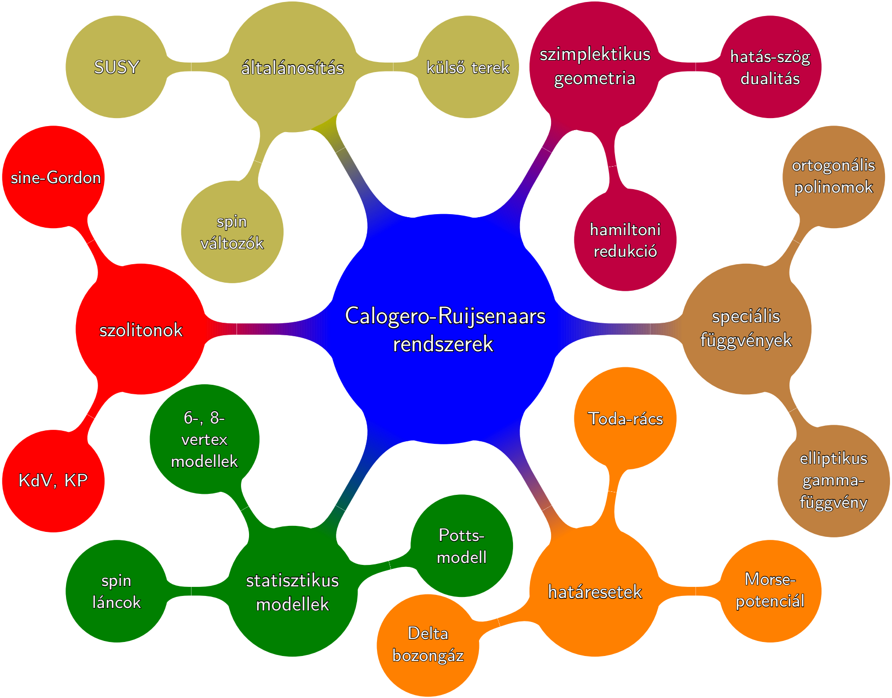


$$H_{\mathsf{rel}} = \frac{1}{\beta^2 m} \sum_{j=1}^{N} \cosh(\beta p_j) \prod_{k \neq j} f(q_j - q_k)$$

$$\lim_{\beta \to 0} (H_{\mathsf{rel}} - \frac{N}{\beta^2 m}) = H_{\mathsf{nr}}$$

$$H_{\mathsf{nr}} = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^{N} p_j^2 + \frac{g^2}{m} \sum_{j<k} V(q_j - q_k)$$

	I: Racionális	II: Hiperbolikus	III: Trigonometrikus	IV: Elliptikus
$V(q)$	$1/q^2$	$\alpha^2/\sinh^2(\alpha q)$	$\alpha^2/\sin^2(\alpha q)$	$\wp(q;\omega,\omega')$
$f(q)^2$	$1+\dfrac{\beta^2 g^2}{q^2}$	$1+\dfrac{\sin^2(\alpha\beta g)}{\sinh^2(\alpha q)}$	$1+\dfrac{\sinh^2(\alpha\beta g)}{\sin^2(\alpha q)}$	$\sigma^2(\mathrm{i}\beta g)[\wp(\mathrm{i}\beta g)-\wp(q)]$


Calogero-Ruijsenaars rendszerek
általánosítás
SUSY
külső terek
spin változók
szimplektikus geometria
hatás-szög dualitás
hamiltoni redukció
szolitonok
sine-Gordon
KdV, KP
speciális függvények
ortogonális polinomok
elliptikus gamma-függvény
statisztikus modellek
6-, 8-vertex modellek
Potts-modell
spin láncok
határesetek
Toda-rács
Morse-potenciál
Delta bozongáz

I.

Redukciós megközelítés, hatás-szög dualitás, és alkalmazások

Hatás-szög dualitásról általában

Legyenek (M, ω, H) és $(\tilde{M}, \tilde{\omega}, \tilde{H})$ Liouville integrálható rendszerek, rendre q, p és $\tilde{q}, \tilde{p}$ kanonikus koordinátákkal. **Hatás-szög dualitásról** akkor beszélünk, ha létezik egy olyan $\mathcal{R}\colon M \to \tilde{M}$ **globális szimplektomorfizmus**, amelyre $(\tilde{q}, \tilde{p}) \circ \mathcal{R}$ hatás-szög változók H-ra és $(q, p) \circ \mathcal{R}^{-1}$ hatás-szög változók $\tilde{H}$-ra nézve.

Dualitási relációk a Calogero-Ruijsenaars rendszerek között

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Hiperbolikus Ruijsenaars-Schneider}} \arrow[r, leftrightarrow, "\mathcal{R}"] \arrow[d, "\beta \to 0"'] & \boxed{\text{Hiperbolikus Ruijsenaars-Schneider}} \arrow[d, "\alpha \to 0"] \\
\boxed{\text{Hiperbolikus Calogero-Moser}} \arrow[r, leftrightarrow, "\mathcal{R}"] \arrow[d, "\alpha \to 0"'] & \boxed{\text{Racionális Ruijsenaars-Schneider}} \arrow[d, "\beta \to 0"] \\
\boxed{\text{Racionális Calogero-Moser}} \arrow[r, leftrightarrow, "\mathcal{R}"] & \boxed{\text{Racionális Calogero-Moser}}
\end{tikzcd}$$

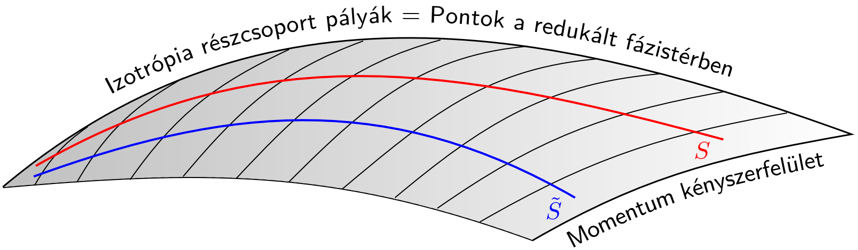
Calogero-Ruijsenaars rendszerek hamiltoni redukcióból

Kiindulásként egy csoportelméleti eredetű fázisteret választunk. Például egy X mátrix Lie-csoport vagy Lie-algebra $P = T^*X$ koérintőnyalábját. Ezen kijelölünk Poisson-kommutáló függvényeket: $\mathcal{H}_j, \tilde{\mathcal{H}}_r \in C^\infty(P)$, $\{\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_k\} = 0$, $\{\tilde{\mathcal{H}}_r, \tilde{\mathcal{H}}_s\} = 0$.

A 'nagy' fázistér (alkalmasan elvégzett) hamiltoni redukciója során egy 'kisebb'/redukált fázistér két természetes modelljét nyerjük (S és $\tilde{S}$).

A $\{\mathcal{H}_j\}$, $\{\tilde{\mathcal{H}}_r\}$ függvénycsaládok $\{H_j\}$, $\{\tilde{H}_r\}$ redukcióiban a Calogero-Ruijsenaars rendszerek Hamilton-függvényeire ismerünk rá és Poisson-zárójelük továbbra is nulla.

Az S és $\tilde{S}$ szelések között természetesen meglévő szimplektomorfizmus szolgáltatja az $\mathcal{R}$ hatás-szög dualitási leképezést.



Tekintsük az $n \times n$-es önadjungált mátrix-párok alkotta ($2n^2$-dimenziós) sokaságot:

$$M = \{(X, P) \mid X, P \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}),\ X^\dagger = X,\ P^\dagger = P\}.$$

Ezen $\Omega = \mathrm{tr}(dX \wedge dP)$ egy szimplektikus forma és $\mathcal{H}(X, P) = \mathrm{tr}(P^2)/2$ a **szabad részecske** Hamilton-függvényének megfelelője. A mozgásegyenletek megoldása:

$$X(t) = tP_0 + X_0, \quad P(t) = P_0.$$

A $\mathcal{H}_j(X, P) = \mathrm{tr}(P^j)/j$ függvények független mozgásállandók, sőt $\{\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_k\} = 0$.

Az $n \times n$-es unitér mátrixok $\mathrm{U}(n)$ csoportja konjugálással hat az (M, Ω) fázistéren:

$$(X, P) \mapsto (UXU^\dagger, UPU^\dagger), \quad U \in \mathrm{U}(n).$$

Erre Ω és $\mathcal{H}_j$ is **invariánsak**. A csoporthatásnak megfelelő **momentum leképezés** a mátrix kommutátor:

$$(X, P) \mapsto [X, P] = XP - PX.$$

Ennek értékét rögzítve kapjuk a momentum kényszerfelületet:

$$[X, P] = \mathrm{i}g(VV^\dagger - \mathbb{1}_n) =: \mu, \qquad V = (1 \dots 1)^\dagger \in \mathbb{R}^n, \quad g \in \mathbb{R}.$$

Jelölje $G_\mu \subset \mathrm{U}(n)$ a μ mátrixot **fixen** hagyó mátrixok csoportját (izotrópia részcsoport).

A kényszerfelület bármely (X,P) pontjához van olyan $U \in G_\mu$, amely **diagonális** alakra hozza az X mátrixot:

$$Q = UXU^\dagger = \mathrm{diag}(q_1, \ldots, q_n).$$

Továbbá az $[X,P] = \mu$ momentum-egyenlet **lerögzíti** az $L = UPU^\dagger$ mátrix alakját is:

$$L_{jk} = (UPU^\dagger)_{jk} = p_j \delta_{jk} + \mathrm{i} g \frac{1-\delta_{jk}}{q_j - q_k}, \quad j,k = 1, \ldots, n,$$

ahol $q_j \neq q_k$ $(j \neq k)$ és $p_j \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ezzel megkaptuk G_μ pályáinak egy sima globális szelését (a redukált fázistér egyik modellje):

$$S = \{(Q(q,p), L(q,p)) \mid q \in \mathcal{C},\ p \in \mathbb{R}^n\}.$$

A $\mathcal{H}(X,P) = \mathrm{tr}(P^2)/2$ Hamilton-függvény $H(q,p) = \mathrm{tr}(L(q,p)^2)/2$ redukciója

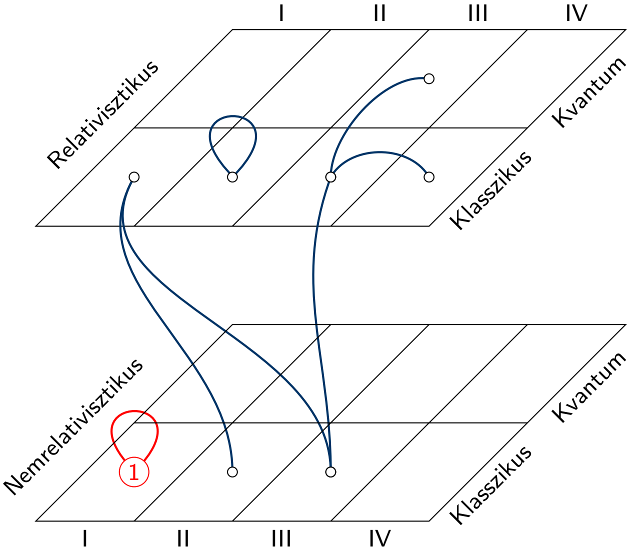
$$H(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n p_j^2 + g^2 \sum_{j<k} \frac{1}{(q_j - q_k)^2}.$$

amely a racionális Calogero-Moser rendszer Hamilton-függvénye. Az L **Lax-mátrix** hatványainak nyoma n **független Poisson-kommutáló** mozgásállandót generál. A hamiltoni **folyamok teljessége** is a redukció azonnali következménye.

A racionális Calogero-Moser modell egy Liouville értelemben integrálható rendszer!

Az X, P szerepét felcserélve minden hasonlóan alakul. A rendszer **önduális**!

1. A racionális Calogero-Moser rendszer spektrális koordinátái



Az imént látott L Lax-mátrix $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sajátértékei involúcióban állnak: $\{\lambda_j, \lambda_k\} = 0$.

Feladat. Adjuk explicit formulát a sajátértékekhez **kanonikusan konjugált** $\theta_1, \dots, \theta_n$ változókra!

$$\{\theta_j, \theta_k\} = 0, \qquad \{\theta_j, \lambda_k\} = \delta_{jk}.$$

Sejtés. (Sklyanin, 2009)

A $\theta_j = C(\lambda_j)/A'(\lambda_j)$ **jók lesznek**, ha

$$A(z) = \det(z\mathbb{1}_n - L), \qquad C(z) = \operatorname{tr}(Q\,\operatorname{adj}(z\mathbb{1}_n - L)VV^\dagger).$$

Megoldás. (Falqui-Mencattini, 2015) A $\phi_j = D(\lambda_j)/A'(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, n$ konjugált koordináták, ahol

$$D(z) = \operatorname{tr}(Q\,\operatorname{adj}(z\mathbb{1}_n - L)).$$

Ráadásul $\phi_j = \theta_j + F_j(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ úgy, hogy $\frac{\partial F_j}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial F_k}{\partial \lambda_j}$ $\Rightarrow$ Sklyanin-formula ✓

A Sklyanin-formula redukciós bizonyítása. (G, 2016)

A ϕ_j mennyiségek a racionális Calogero-Moser rendszer szög koordinátái és

$$C(z) = D(z) + \frac{\mathrm{i}g}{2} A''(z),$$

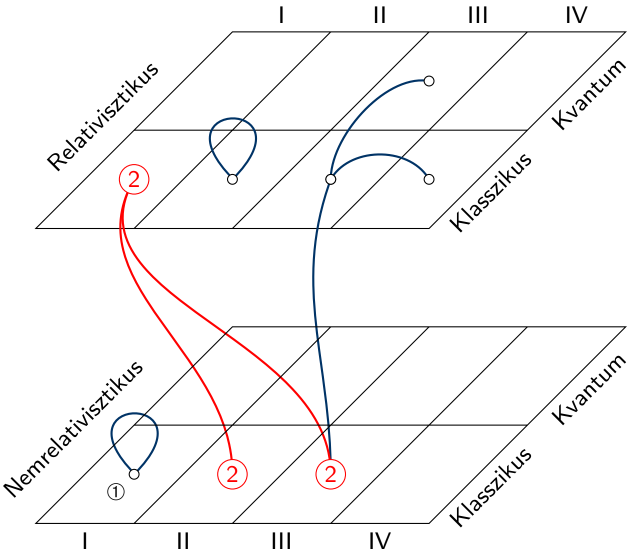
amiből $F_j(\lambda) = \mathrm{i}g \sum_{k \neq j} (\lambda_j - \lambda_k)^{-1}$ és a Sklyanin-formula is következik.

1. A racionális Calogero-Moser rendszer spektrális koordinátái — Eredmények (G, 2016)

A racionális Calogero-Moser rendszer redukciós levezetését alkalmazva:

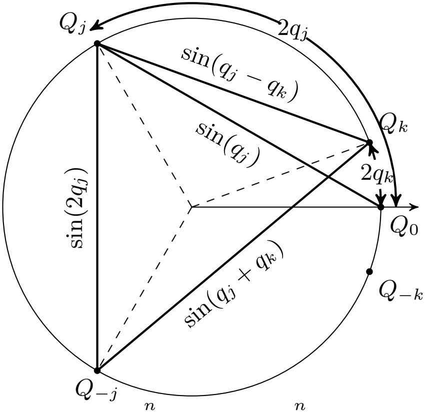
1. azonosítottuk a Falqui és Mencattini által felírt kanonikus koordinátákat
2. bizonyítottuk a Falqui és Mencattini által megsejtett összefüggést
3. igazoltuk Sklyanin formuláját, amely **spektrális kanonikus koordinátákat** szolgáltat a racionális Calogero-Moser rendszerhez

2. A trigonometrikus BC$_n$ Sutherland rendszer hatás-szög duálisa



Trigonometrikus BC_n Suhterland modell – fizikai interpretáció

$2n+1$ számú részecske $1/2$ sugarú körön mozog a fix Q_0 pontra nézve szimmetrikusan.
A párkölcsönhatás fordítottan arányos a **húrtávolság négyzetével**.



A konfigurációs tér egy **Weyl alkóv**

$A = \{q \in \mathbb{R}^n \mid \pi/2 > q_1 > \cdots > q_n > 0\}.$

A fázistér ennek koérintőnyalábja

$A \times \mathbb{R}^n = \{(q, p) \mid q \in A,\, p \in \mathbb{R}^n\},$

ellátva a kanonikus szimplektikus formával

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dq_j \wedge dp_j.$$

A rendszer Hamilton-függvénye

$$H^{\mathrm{Suth}}_{\mathrm{BC}_n} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{1\le j<k\le n} \frac{\gamma}{\sin^2(q_j - q_k)} + \frac{\gamma}{\sin^2(q_j + q_k)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_1}{\sin^2(q_j)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_2}{\sin^2(2q_j)},$$

ahol $\boldsymbol{\gamma, \gamma_1, \gamma_2}$ **valós csatolási állandók**, melyekre az alábbi feltételeket írjuk elő:

$$\gamma > 0, \quad \gamma_2 > 0, \quad 4\gamma_1 + \gamma_2 > 0.$$

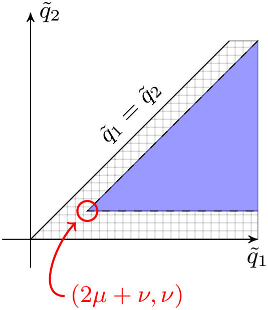
Az $\mathrm{U}(2n)$ csoporton mozgó 'szabad részecske' megfelelő redukciójaként **származtattuk** a trigonometrikus BC$_n$ Sutherland modellt és hatás-szög duálisát. A duális rendszer Hamilton-függvénye (lokális koordinátákban)

$$\tilde{H}^0(\tilde{q},\tilde{p}) = \sum_{j=1}^{n} \cos(\tilde{p}_j)\left[1-\frac{\nu^2}{\tilde{q}_j^2}\right]^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{\kappa^2}{\tilde{q}_j^2}\right]^{\frac{1}{2}} \prod_{\substack{k=1\\(k\neq j)}}^{n}\left[1-\frac{4\mu^2}{(\tilde{q}_j\pm\tilde{q}_k)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{\nu\kappa}{4\mu^2}\prod_{j=1}^{n}\left[1-\frac{4\mu^2}{\tilde{q}_j^2}\right]-\frac{\nu\kappa}{4\mu^2},$$

ahol $\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\kappa}$ **valós csatolási állandók**: $\mu>0$, $\nu>|\kappa|\geq 0$.
A $\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{q}_n$ koordináták tere egy **vastag falú Weyl kamra**

$$C_2=\left\{\tilde{q}\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \begin{array}{l}\tilde{q}_j-\tilde{q}_{j+1}>2\mu,\\ (j=1,\ldots,n-1)\end{array} \quad \text{and} \quad \tilde{q}_n>\max\{\nu,|\kappa|\}\right\},$$



A racionális BC$_n$ Ruijsenaars-Schneider-van Diejen rendszer egy valós formája.

2. A trigonometrikus BC_n Sutherland rendszer hatás-szög duálisa — Eredmények (Fehér-G, 2014-15 + G, 2014)

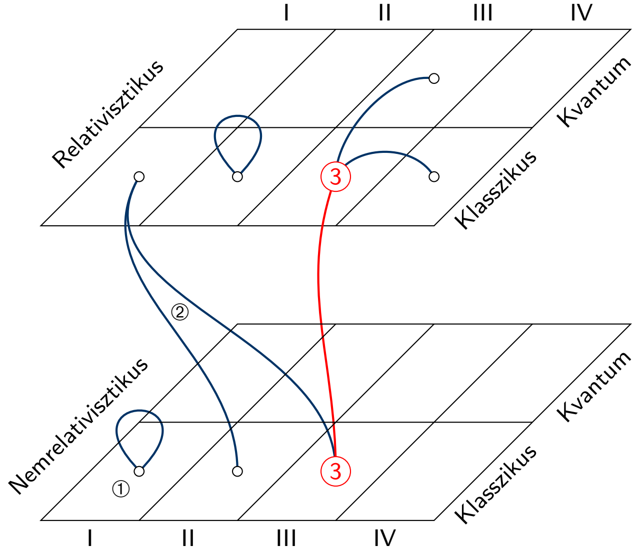
Hamiltoni redukció módszerével:

1. megkonstruáltuk a racionális BC_n Ruijsenaars-Schneider modell egy **Lax-mátrixát három független csatolási állandóval** (μ, ν, κ)
2. **hatás-szög dualitást** igazoltunk a trigonometrikus BC_n Sutherland és egy racionális BC_n Ruijsenaars-Schneider között
3. bizonyítottuk, hogy a duális modell lokális leírásában szereplő $(\tilde{q}, \tilde{p})$ koordináták **kanonikus koordináta-rendszert** alkotnak
4. megadtuk a fázisterek és Lax-mátrixok **globális** alakját

A hatás-szög dualitást alkalmazva:

5. jellemeztük a trigonometrikus BC_n Sutherland rendszer **egyensúlyi konfigurációit**
6. igazoltuk, hogy a duális modell **maximálisan szuperintegrálható**
7. bizonyítottuk a Lax mátrix által generált Poisson-kommutáló mozgásállandók és van Diejen involúcióban álló első integráljai közötti **ekvivalenciát** (lineáris kapcsolat meglétét).

3. A trigonometrikus BC$_n$ Sutherland rendszer Poisson-Lie deformációja



Az $\mathrm{SU}(2n)$ Poisson-Lie csoport $\mathrm{SL}(2n,\mathbb{C})$ Heisenberg duplájának – a $T^*\mathrm{SU}(2n)$ koérintőnyaláb deformációjának – általánosított redukciójából származó rendszer Hamilton-függvénye:

$$H = \sum_{j=1}^{n} \cos(\hat{q}_j) w(\hat{p}_j; a)^{\frac{1}{2}} \prod_{k \neq j}^{n} \left[1 - \frac{\sinh^2(x)}{\sinh^2(\hat{p}_j - \hat{p}_k)}\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{e^{a+b} + e^{a-b}}{2} \sum_{j=1}^{n} e^{-2\hat{p}_j},$$

ahol $w(\hat{p}_j; a) = 1 - (1 + e^{2a})e^{-2\hat{p}_j} + e^{2a}e^{-4\hat{p}_j}$ egy Morse-potenciál és $\boldsymbol{a, b, x}$ **valós csatolási állandók**: $a > 0$, $b \neq 0$, $x \neq 0$. A $\hat{q}$ vektor az n-tóruszt paraméterezi $e^{\mathrm{i}\hat{q}}$ alakban és $\hat{p}$ egy vastag falú Weyl-kamrában változik:

$$\mathcal{C}_x = \{\hat{p} \in \mathbb{R}^n \mid 0 > \hat{p}_1,\ \hat{p}_k - \hat{p}_{k+1} > |x|\ (k = 1, \ldots, n-1)\}.$$

Az $\exp(\hat{p}_j) = \sin(q_j)$, $\hat{q}_j = p_j \tan(q_j)$ kanonikus transzformációval a $H(\hat{p}, \hat{q}; x, a, b) = \mathcal{H}(q, p; x, a, b)$ Hamilton-függvényhez jutunk. Egy $\beta > 0$ paramétert vezetünk be az alábbi helyettesítésekkel: $a \to \beta a$, $b \to \beta b$, $x \to \beta x$, $p \to \beta p$.
A 'nemrelativisztikus' határesetben visszakapjuk a trigonometrikus BC_n Sutherland-modellt

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{\mathcal{H}(q, \beta p; \beta a, \beta b, \beta x) - n}{\beta^2} = H^{\mathsf{Suth}}_{\mathsf{BC}_n}(q, p; \gamma, \gamma_1, \gamma_2),$$

ahol az alábbi azonosításokat tesszük

$$\gamma = x^2, \quad \gamma_1 = (b^2 - a^2)/2, \quad \gamma_2 = 2a^2.$$

A trigonometrikus BC_n Ruijsenaars-Schneider-van Diejen rendszer Hamilton-függvénye

$$H_{\mathsf{vD}}(\lambda,\theta)=\sum_{j=1}^{n}\Big(\cosh(\theta_j)\mathsf{V}_j(\lambda)^{1/2}\mathsf{V}_{-j}(\lambda)^{1/2}-[\mathsf{V}_j(\lambda)+\mathsf{V}_{-j}(\lambda)]/2\Big),$$

alakú, ahol $\mathsf{V}_{\pm j}$ $(j=1,\ldots,n)$ az alábbi függvény

$$\mathsf{V}_{\pm j}(\lambda)=\mathsf{w}(\pm\lambda_j)\prod_{\substack{k=1\\(k\neq j)}}^{n}\mathsf{v}(\pm\lambda_j-\lambda_k)\mathsf{v}(\pm\lambda_j+\lambda_k),$$

és v,w trigonometrikus potenciálok:

$$\mathsf{v}(z)=\frac{\sin(\mu+z)}{\sin(z)}\quad\text{and}\quad\mathsf{w}(z)=\frac{\sin(\mu_0+z)}{\sin(z)}\frac{\cos(\mu_1+z)}{\cos(z)}\frac{\sin(\mu_0'+z)}{\sin(z)}\frac{\cos(\mu_1'+z)}{\cos(z)}.$$

Itt $\mu,\mu_0,\mu_1,\mu_0',\mu_1'$ tetszőleges csatolások. Ezeket speciálisan megválasztva

$$\mu=\mathrm{i}x,\quad\mu_0=\mathrm{i}(a+R),\quad\mu_0'=-\mathrm{i}R,\quad\mu_1=\mathrm{i}b+\pi/2,\quad\mu_1'=\pi/2,$$

az általunk levezetett Hamilton-függvény megkapható H_{vD} határeseteként:

$$\lim_{R\to\infty}H_{\mathsf{vD}}\Big(\mathrm{i}(\hat{p}+R),\mathrm{i}\hat{q})\Big)=H(\hat{p},\hat{q};x,a,b)+\text{konst.}$$

3. A trigonometrikus BC$_n$ Sutherland rendszer Poisson-Lie deformációja — Eredmények (Fehér-G, 2015-16)

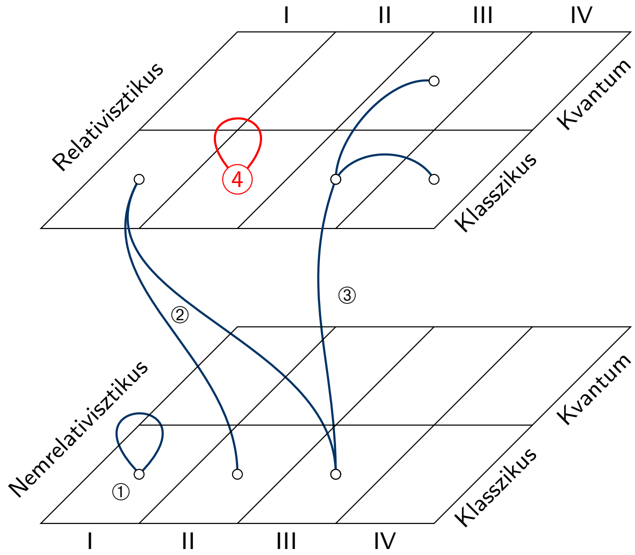
1. Marshall korábbi, hiperbolikus esettel foglalkozó munkáját általánosítva levezettük a trigonometrikus BC$_n$ Sutherland rendszer egy 1-paraméteres integrálható deformációját a $2n \times 2n$-es egységnyi determinánsú unitér mátrixok alkotta Poisson-Lie csoport Heisenberg duplájának általánosított Marsden-Weinstein redukciójából.
2. Megoldottuk a momentum kényszer-egyenletet, visszavezetve azt egy Fehér és Klimčík által korábban már részletesen vizsgált egyenletre.
3. Globálisan jellemeztük a redukált rendszert. Igazoltuk, hogy a levezetett rendszer Liouville integrálható.
4. Továbbá megmutattuk, hogy a modell miként kapható meg van Diejen öt csatolási állandót tartalmazó modelljéből. Ezáltal a levezetett modellt sikerült beilleszteni a Calogero-Ruijsenaars típusú integrálható rendszerek közé.
5. Végül teljessé tettük a hiperbolikus verzió Marshall által adott származtatását.

II.

Közvetlen vizsgálatok eredményei

a Ruijsenaars-Schneider rendszerekben

4. A hiperbolikus BC_n Ruijsenaars-Schneider-van Diejen rendszer Lax reprezentációja



van Diejen ('94-es PhD) munkájából tudjuk, hogy az **öt csatolási állandót** tartalmazó hiperbolikus Ruijsenaars-Schneider rendszerek **integrálhatók**. Lax-mátrix? (Lax-pár?)

Tekintsük az alábbi $2n \times 2n$-es mátrixot

$$C = \begin{bmatrix} 0_n & \mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0_n \end{bmatrix}$$

és a $z \in \mathbb{C}^n$, $F \in \mathbb{C}^{2n}$ és $\Lambda \in \mathbb{R}^{2n}$ vektorokat, melyek komponensei

$$z_a = -\frac{\sinh(\mathrm{i}\nu + 2\lambda_a)}{\sinh(2\lambda_a)} \prod_{b \neq a} \frac{\sinh(\mathrm{i}\mu + \lambda_a - \lambda_b)}{\sinh(\lambda_a - \lambda_b)} \frac{\sinh(\mathrm{i}\mu + \lambda_a + \lambda_b)}{\sinh(\lambda_a + \lambda_b)},$$

$$F_a = \sqrt{e^{\theta_a}|z_a|}, \qquad F_{n+a} = \bar{z}_a / \sqrt{e^{\theta_a}|z_a|}, \quad a = 1, \ldots, n,$$

és

$$\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, -\lambda_1, \ldots, -\lambda_n).$$

Itt $\theta \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1 > \cdots > \lambda_n > 0$ és μ, ν **valós csatolási állandók**. A keresett Lax-mátrix:

$$L_{jk} = \frac{\mathrm{i}\sin(\mu) F_j \bar{F}_k + \mathrm{i}\sin(\mu - \nu) C_{jk}}{\sinh(\mathrm{i}\mu + \Lambda_j - \Lambda_k)}$$

L önadjungált és $\mathrm{U}(n,n)$ eleme, azaz kielégíti az $LCL = C$ egyenletet. Sőt $L > 0$ és

$$\mathrm{Spec}(L) = \{e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}, e^{-x_1}, \ldots, e^{-x_n}\}.$$

L eleget tesz az alábbi Ruijsenaars-féle felcserélési relációnak

$$e^{\mathrm{i}\mu} e^{\mathrm{ad}_{\boldsymbol{\Lambda}}} L - e^{-\mathrm{i}\mu} e^{-\mathrm{ad}_{\boldsymbol{\Lambda}}} L = 2\mathrm{i}\sin(\mu) F F^\dagger + 2\mathrm{i}\sin(\mu - \nu) C.$$

Ennek segítségével igazolható, hogy $\sin(\mu - \nu) \neq 0$ esetén L sajátértékei különbözőek.

Megadtuk a 2-paraméteres van Diejen rendszer egy Lax reprezentációját:

$$\dot{L} = [L, B],$$

ahol L a már látott Lax-mátrix és B az alábbi anti-hermitikus mátrix

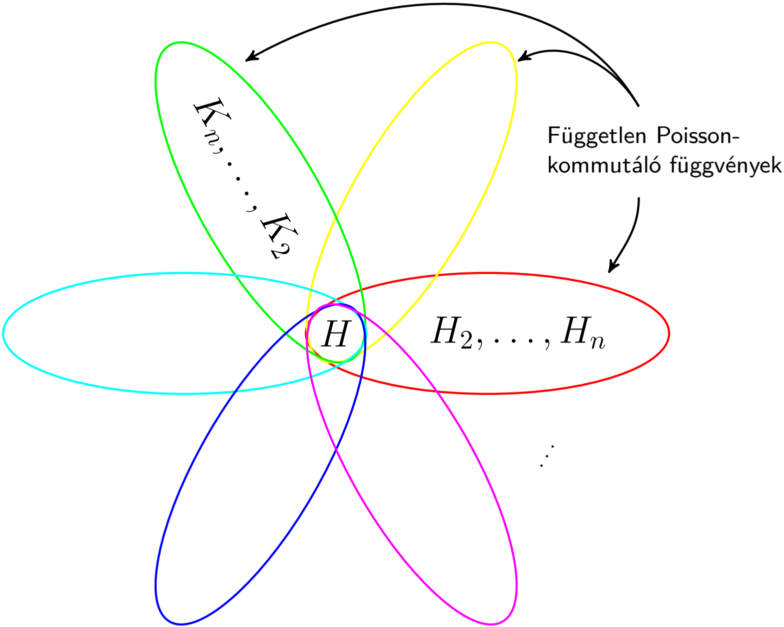
$$B_{a,a} = B_{n+a,n+a} = \frac{\mathrm{i}}{F_a} \mathrm{Im} \left(\sum_{k \neq a} \frac{L_{ak} - L^{-1}_{ak}}{2\sinh(\Lambda_a - \Lambda_k)} F_k \right), \quad a = 1, \ldots, n,$$

$$B_{jk} = -\frac{L_{jk} - L^{-1}_{jk}}{2\tanh(\Lambda_a - \Lambda_k)}, \quad j, k = 1, \ldots, 2n \ (j \neq k).$$

Az (L, B) pár segítségével felírtuk a $(\lambda(t), \theta(t))$ megoldások aszimptotikáját:

$$\lambda_a(t) \sim t \sinh(\theta_a^{\pm}) + \lambda_a^{\pm}, \quad \theta_a(t) \sim \theta_a^{\pm}.$$

Ezt használva beláttuk, hogy az L által generált $\{K_j\}$ mozgásállandók és van Diejen Poisson-kommutáló $\{H_k\}$ függvényei ekvivalensek. $\Rightarrow$ L sajátértékei involúcióban állnak.

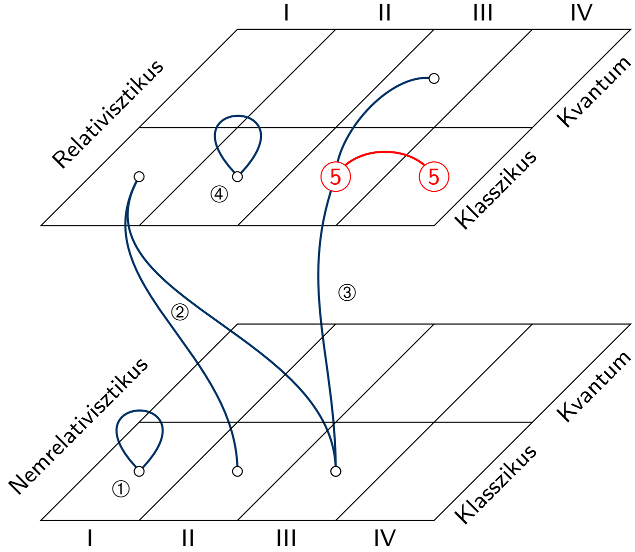


$K_n, \ldots, K_2$
H
$H_2, \ldots, H_n$
Független Poisson-
kommutáló függvények

4. A hiperbolikus BC_n Ruijsenaars-Schneider-van Diejen rendszer Lax reprezentációja — Eredmények (Pusztai-G, 2016)

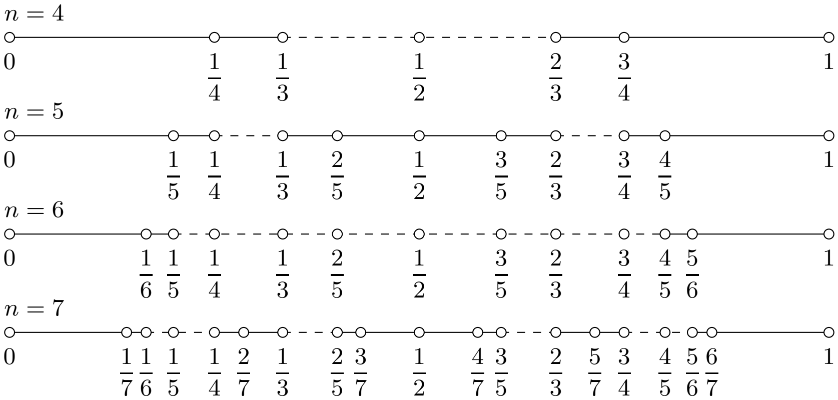
1. Igazoltuk, hogy a Lax mátrix eleme az (n, n)-szignatúrájú 'belső szorzással' definiált pszeudounitér mátrixok Lie-csoportjának.
2. Pusztai korábbi eredményét felhasználva bizonyítottuk, hogy a Lax mátrix pozitív definit.
3. Megmutattuk a Pusztai által levezetett szóráselméleti eredmények segítségével, hogy a Lax mátrixból származó spektrális invariánsok és van Diejen öt paramétert tartalmazó Poisson kommutáló függvénycsaládjának megfelelő specializációja ekvivalensek.
4. Ennek segítségével bebizonyítottuk, hogy a Lax mátrix független sajátértékei Poisson kommutáló mozgásállandók teljes rendszerét alkotják.

5. Trigonometrikus és elliptikus Ruijsenaars-Schneider modellek a komplex projektív téren



A kompaktifikált trigonometrikus Ruijsenaars-Schneider modellt $\beta \to \mathrm{i}\beta$ helyettesítéssel kapjuk a hagyományos trigonometrikus modellből:

$$H(q,p) = \sum_{j=1}^{n} \cos(p_j) \sqrt{\prod_{k\neq j} \left[1 - \frac{\sin^2(g)}{\sin^2(x_j - x_k)}\right]}.$$



g/π értékei $n = 4, 5, 6, 7$ esetén. A jelzett számok 'tiltott értékek'. A megengedett g csatolások kétféle intervallumot alkot. Ezeket 1-es (folytonos) és 2-es (szaggatott) típusúnak nevezzük.

Az 1-es típusú g értékek esetén, a konfigurációs tér (lokálisan) egy $(n-1)$-dimenziós szimplex az $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ tömegközépponti hipersíkban:

$$\Sigma_g = \{x \in E \mid x_j - x_{j+p} - g > 0,\ j = 1, \ldots, n\},$$

ahol az indexeket periodikusan kiterjesztettük: $x_{n+k} = x_k - \pi$ minden k-ra. A fázistér tehát lokálisan

$$P_y^{\mathrm{loc}} = \Sigma_g \times \mathbb{T}^{n-1}, \quad \omega^{\mathrm{loc}} = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dp_j.$$

ahol $\mathbb{T}^{n-1}$ az E-beli $(n-1)$-tórusz.

Egy $\mathcal{E}\colon P_y^{\mathrm{loc}} \to \mathbb{C}^n$, $(x, e^{\mathrm{i}p}) \mapsto u$ leképezéssel új (komplex) változókat vezetünk be:

$$|u_j| = \sqrt{x_j - x_{j+p} - g}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\arg(u_j) = \sum_{k=1}^{n-1} \Omega_{j,k}(p_{k-1} - p_k), \quad j = 1, \ldots, n-1, \qquad \arg(u_n) = 0,$$

ahol $p_0 \equiv 0$ és $\Omega_{j,k}$ $(j, k = 1, \ldots, n-1)$ olyan egészek, melyekre

$$\mathcal{E}^*\left(\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n} d\bar{u}_j \wedge du_j\right) = \omega^{\mathrm{loc}}.$$

Az $\mathcal{E}$ leképezés révén a P_y^{loc} lokális fázistér beágyazható a $\mathbb{CP}^{n-1}$ projektív térbe.

A modell Lax-mátrixa (lokális koordinátákban felírva):

$$L_g^{\mathrm{loc}}(x, e^{\mathrm{i}p})_{jk} = \frac{\sin(g)}{\sin(x_j - x_k + g)} [V_j(x, g)]^{1/2} [V_k(x, -g)]^{1/2} e^{\mathrm{i}p_k},$$

ahol $V_j(x, \pm g)$ az alábbi pozitív sima függvények

$$V_j(x, \pm g) = \operatorname{sgn}(\sin(ng)) \prod_{k \neq j} \frac{\sin(x_j - x_k \pm g)}{\sin(x_j - x_k)}.$$

Megmutatható, hogy $V_j(x, g) = |u_j|^2 W_j(x, g)$ és $V_k(x, -g) = |u_{k-p}|^2 W_k(x, -g)$, ahol az $W_j(x(u), g), W_k(x(u), -g)$ függvényeknek létezik sima kiterjesztése $\mathbb{CP}^{n-1}$-re.

Az L_g^{loc} lokális Lax-mátrix létezik egy olyan sima L_g kiterjesztése $\mathbb{CP}^{n-1}$-re, amelyre

$$L_g((\pi \circ \mathcal{E})(x, e^{\mathrm{i}p})) = \Delta(p)^{-1} L_g^{\mathrm{loc}}(x, e^{\mathrm{i}p}) \Delta(p), \quad \forall (x, e^{\mathrm{i}p}) \in P_y^{\mathrm{loc}},$$

ahol $\Delta(p) = \mathrm{diag}(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ az alábbi diagonális elemekkel

$$\Delta_j = \exp\Big(\mathrm{i} \sum_{k=1}^{n-1} \Omega_{j,k}(p_{k-1} - p_k)\Big), \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad \Delta_n = 1$$

Módszerünk az elliptikus szinten is működik $\Rightarrow$ **Új kompakt elliptikus rendszerek!**

5. Trigonometrikus és elliptikus Ruijsenaars-Schneider modellek a komplex projektív téren — Eredmények (Fehér-G, 2016)

1. Megvizsgáltuk a Fehér és Kluck által korábban felfedezett ún. *egyes típusú* csatolási állandóval jellemzett kompaktifikált Ruijsenaars-Schneider modelleket, és közvetlen, elemi úton megmutattuk, hogy a trigonometrikus esetben ezen rendszerek miként ágyazhatók be a megfelelő komplex projektív térbe.
2. A trigonometrikus esetben alkalmazott eljárást általánosítottuk az elliptikus potenciálok esetére is, ezáltal új elliptikus Ruijsenaars-Schneider modelleket konstruáltunk a komplex projektív téren. Ezzel kiterjesztettük Ruijsenaars korábbi eredményeit.

Publikációk

Fehér-G

J. Math. Phys. 55 (2014) 102704
arXiv:1407.2057 [math-ph]

Phys. Lett. A 379 (2015) 2685-2689
arXiv:1503.01303 [math-ph]

Nucl. Phys. B 901 (2015) 85-114
arXiv:1508.04991 [math-ph]

Lett. Math. Phys. 106 (2016) 1429-1449
arXiv:1605.09736 [math-ph]

J. Geom. Phys. 115 (2017) 139-149
arXiv:1603.02877 [math-ph]

Pusztai-G

Commun. Math. Phys. (2017)
arXiv:1603.06710 [math-ph]

G

J. Phys.: Conf. Ser. 563 (2014) 012012
arXiv:1410.0301 [math-ph]

SIGMA 12 (2016) 027
arXiv:1601.01181 [math-ph]