Kvantumszimmetriák

Böhm Gabriella

Wigner Fizikai Kutatóközpont, Budapest

Szeged

2017. november 16.

Kvantumszimmetriák

I. A kvantumtérelmélet axiomatikus megközelítése
II. A DHR-kategória
III. Szimmetria rekonstrukció
IV. Legalább 2+1 dimenzió: csoportok és a Doplicher–Roberts-tétel
V. Eltérő sajátosságok alacsony dimenzióban
VI. Nem feltétlenül szimmetrikus fonás: Hopf-algebra
VII. Nem feltétlenül egész statisztikus dimenziók: gyenge Hopf-algebra
VIII. A lejtőn nincs megállás...

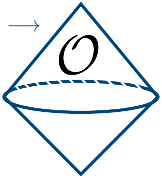
pontosabb és bővebb forrás:

az **nLab** megfelelő oldalai és az ott megadott hivatkozások

I. A kvantumtérelmélet axiomatikus megközelítése

A Haag–Kastler-axiómák [**nLab**: Haag-Kastler axioms]

Minkowski-téridő kettős kúpja $\longrightarrow$



$\mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$

$\uparrow$ $\mathcal{O}$-ban megfigyelhető mennyiségek C^*-algebrája

- létezik $\mathcal{A} := \overline{\bigcup_{\mathcal{O}} \mathcal{A}(\mathcal{O})}$ $\longleftarrow$ induktív C^*-algebrai limesz
- izotónia: $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$
- lokalitás: $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)'$ $\longleftarrow$ kommutáns $\mathcal{A}$-ban

  Poincaré-csoport $\downarrow$ $\uparrow$ térszerűen szeparált
- kovariancia: $\mathcal{P} \ni g \mapsto \alpha_g \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$; $\alpha_g(\mathcal{A}(\mathcal{O})) = \mathcal{A}(g(\mathcal{O}))$

\+ algebrai Haag-dualitás: $\forall \mathcal{O}$, $\mathcal{A}(\mathcal{O}) = (\overline{\bigcup_{\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}} \mathcal{A}(\mathcal{O}_1)})' =: \mathcal{A}(\mathcal{O}')'$

Lokálisan keltett ábrázolások [**nLab**: DHR superselection theory]

π_0 vákuum ábrázolás: $\mathcal{A}$ hű irreducibilis ábrázolása vm $\mathcal{H}$ Hilbert-téren

$\downarrow$ kommutáns $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-ban

π_0 Haag-duális ha $\pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O}'))' = \pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O}))$

π ábrázolás lokálisan keltett (π_0-ból) ha vm $\mathcal{O}$-ra $\pi|\mathcal{A}(\mathcal{O}') \cong \pi_0|\mathcal{A}(\mathcal{O}')$
fizikailag: $\mathcal{O}$-ban lokalizált töltés van jelen

Doplicher–Haag–Roberts: Ha π_0 Haag-duális, akkor minden π_0-ból lokálisan keltett ábrázolás $\pi_0 \circ \varrho$ alakú ahol ϱ az $\mathcal{A}$ endomorfizmusa mely

- lokalizált: vm $\mathcal{O}$-ra $\varrho|\mathcal{A}(\mathcal{O}') = \mathrm{id}$
- transzportálható: a Minkowski-tér minden x pontjához létezik egy $x + \mathcal{O}$-ban lokalizált ϱ_x endomorfizmus, amivel $\pi_0 \circ \varrho \cong \pi_0 \circ \varrho_x$.

II. A DHR-kategória DHR($\mathcal{A}$) [**nLab**: DHR category]

objektumok: $\mathcal{A}$ lokalizált transzportálható endomorfizmusai

$\varrho_1 \to \varrho_2$ **morfizmusok**: $U \in \mathcal{A}$ amire $U\varrho_1(-) = \varrho_2(-)U$

kompozíció: $\mathcal{A}$ szorzásából

$$¡ \quad \varrho_1 \cong \varrho_2 \quad \overset{\pi_0 \text{ Haag-duális}}{\Leftrightarrow} \quad \pi_0 \circ \varrho_1 \cong \pi_0 \circ \varrho_2 \quad !$$

gazdag további struktúra $\sim$ **fizikai jelentéssel**

- $\oplus$ az ábrázolások direkt összegéből
- monoidális struktúra (szorzás féle) $\sim$ **töltések összeadása**

  $(\varrho_1 \xrightarrow{U_1} \varrho_1' \,,\ \varrho_2 \xrightarrow{U_2} \varrho_2') \mapsto\ \varrho_2 \circ \varrho_1 \xrightarrow{U_2 \varrho_2(U_1)} \varrho_2' \circ \varrho_1'$
- duális objektum $\sim$ **ellentett töltés**

  $\varrho \mapsto \overline{\varrho}$ amire $\varrho \circ \overline{\varrho}$-ban direkt összeadandó id
- **egyértelmű** $\varrho \mapsto d_\varrho \in \mathbb{C}$ statisztikus dimenzió amire

  $\varrho \cong \varrho' \ \Rightarrow\ d_\varrho = d_{\varrho'} \qquad d_\varrho = d_{\overline{\varrho}} \qquad d_{\varrho\oplus\varrho'} = d_\varrho + d_{\varrho'} \qquad d_{\varrho\circ\varrho'} = d_\varrho d_{\varrho'}$
- fonás $\sim$ **részecske statisztika**

  $\varrho_1 \circ \varrho_2 = \varrho_2 \circ \varrho_1$ ha $\varrho_1 \overset{\substack{\text{térszerűen szeparált tartományokban lokalizáltak}\\ \downarrow}}{\times} \varrho_2 \Longrightarrow \varrho_1$ és ϱ_2 transzportálhatókra

  $\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2) :=\ \varrho_1 \circ \varrho_2 \xrightarrow{U_1 \varrho_1(U_2)} \hat\varrho_1 \circ \hat\varrho_2 \overset{\hat\varrho_1 \times \hat\varrho_2}{=} \hat\varrho_2 \circ \hat\varrho_1 \xrightarrow{U_2^{-1} \varrho_2(U_1^{-1})} \varrho_2 \circ \varrho_1$

  ¡ $\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2)$ **állandó** ha $\hat\varrho_1$ és $\hat\varrho_2$ lokalizációja **folytonosan** változik !

III. Szimmetria rekonstrukció

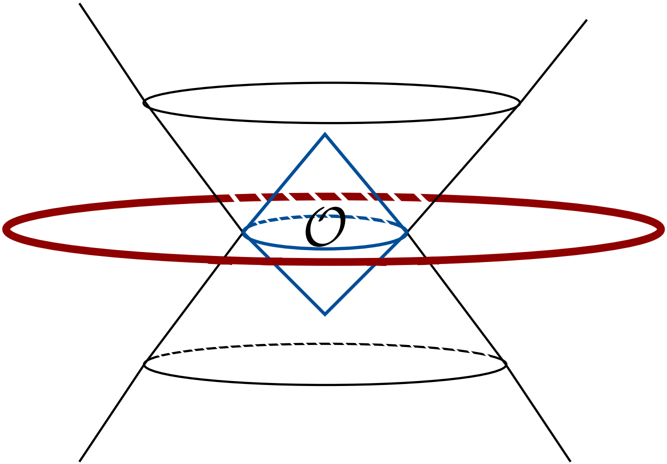
keresett egy G csoport – vagy alkalmas általánosítása – amire

$$\mathrm{Rep}(G) \cong \mathrm{DHR}(\mathcal{A})$$

mint kategóriák a fenti további struktúrákkal.

IV. Legalább 2+1 dimenzió: csoportok és a Doplicher–Roberts-tétel

[**nLab**: Doplicher-Roberts reconstruction theorem]



adott $\mathcal{O}$-tól térszerűen szeparált tartomány **összefüggő**

Doplicher–Roberts:

- DHR($\mathcal{A}$) fonása szimmetria: $\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2)^{-1} = \varepsilon(\varrho_2, \varrho_1)$
- minden d_ϱ egész
- izomorfia erejéig egyértelmű kompakt G csoport amire Rep(G) $\cong$ DHR($\mathcal{A}$)

Rep(G)-ben

$\bigoplus$ vektorterek $V_1 \oplus V_2$ direkt összegéből:
$(D_1 \oplus D_2)(g)(|v\rangle + |w\rangle) := D_1(g)|v\rangle + D_2(g)|w\rangle$

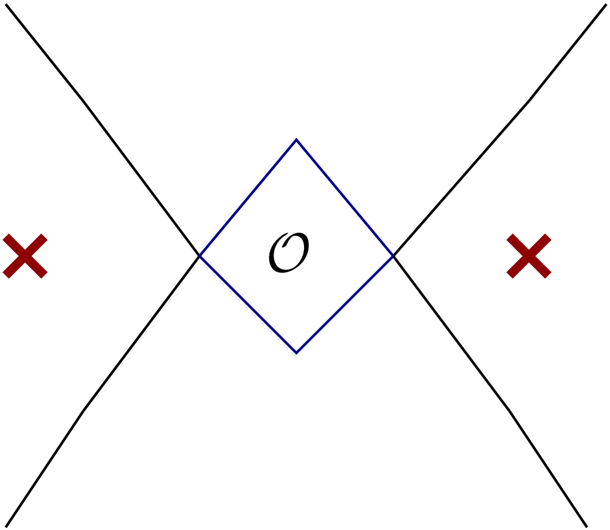
$\bigotimes$ vektorterek $V_1 \otimes V_2$ tenzor szorzatából:
$(D_1 \otimes D_2)(g)|v \otimes w\rangle := D_1(g)|v\rangle \otimes D_2(g)|w\rangle$
egysége $D_0(g) \cdot k = k \ \forall k \in \mathbb{C}$

$\overline{(-)}$ kontragradiens ábrázolás a duális téren: $\langle v|\overline{D}(g) := \langle D(g^{-1}) \cdot v|$

d statisztikus dimenzió: $d_{(D,V)} = \dim(V)$

ε fonás: vektorterek flip : $V \otimes W \to W \otimes V$, $v \otimes w \mapsto w \otimes v$ szimmetriájából

V. Eltérő sajátosságok alacsony dimenzióban



adott $\mathcal{O}$-tól térszerűen szeparált tartomány **nem összefüggő** emiatt

- igenis előfordul **nem szimmetrikus** fonás
- vannak **nem egész** statisztikus dimenziók

csoport szimmetria kizárt:
$\dim(V)$ megoldaná a statisztikus dimenzióra vonatkozó egyenleteket
a fonás a vektorterek szimmetriája lenne
¿ **akkor mi** ?

G **csoport** ábrázolása egy vektortéren $\mathbb{C}G$ **csoportalgebra** ábrázolása is

bármely A algebrára $\mathrm{Rep}(A)$ kategória $\oplus$-gel —

a további struktúrákhoz több kell. . .

VI. Nem feltétlenül szimmetrikus fonás: Hopf-algebra

[**nLab**: Hopf algebra]

A algebrára Rep(A)-ban legyen

$\otimes$ vektorterek $V_1 \otimes V_2$ tenzor szorzatából:
$(D_1 \otimes D_2)(a)|v \otimes w\rangle := D_1(?)|v\rangle \otimes D_2(?)|w\rangle$ kell egy
$A \to A \otimes A,\ a \mapsto \sum a_1 \otimes a_2$ algebra homomorfizmus (**koszorzás**),
amivel $(D_1 \otimes D_2)(a)|v \otimes w\rangle := \sum D_1(a_1)|v\rangle \otimes D_2(a_2)|w\rangle$

egysége $\mathbb{C}$, kell egy $D_0 : A \to \mathbb{C}$ algebra homomorfizmus (**koegység**)

$\overline{(-)}$ a duális vektortéren: $\langle v|\overline{D}(a) := \langle D(?) \cdot v|$ kell egy
$A \to A,\ a \mapsto \bar{a}$ algebra anti-homomorfizmus (**antipód**),
amivel $\langle v|\overline{D}(a) := \langle D(\bar{a}) \cdot v|$

d statisztikus dimenzió: $d_{(D,V)} = \dim(V)$

hogy monoidális kategória legyen duális objektumokkal:

Hopf-algebra axiómák

¡ monoidális és duálist őrző felejtő funktor a vektorterek kategóriájába !

fonáshoz $R \in A \otimes A$ amire $R(\sum a_1 \otimes a_2) = (\sum a_2 \otimes a_1)R \ \forall a \in A$

hogy $\mathrm{flip} \circ (D_1 \otimes D_2)(R) : V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$ fonás legyen:

kvázitrianguláris Hopf-algebra axiómák

általában **nem szimmetrikus** fonás

Példa G csoport $\mathbb{C}G$ csoportalgebrája

koszorzás	$\mathbb{C}G \to \mathbb{C}G \otimes \mathbb{C}G$	$g \mapsto g \otimes g$	
koegység	$\mathbb{C}G \to \mathbb{C}$	$g \mapsto 1$	
antipód	$\mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$	$g \mapsto g^{-1}$	$g \in G$

$R = 1 \otimes 1 \in \mathbb{C}G \otimes \mathbb{C}G$

VII. Nem feltétlenül egész statisztikus dimenziók: gyenge Hopf-algebra

[**nLab**: weak bialgebra]

ha $D_1 \otimes D_2$ nem $V_1 \otimes V_2$-n él $\Rightarrow$

$d_{D_i} = \dim(V_i)$ **nem oldja meg** a $d_{D_1 \otimes D_2} = d_{D_1} d_{D_2}$ egyenletet

ha $a \mapsto \sum a_1 \otimes a_2$ multiplikatív de nem 1 őrző $\Rightarrow (\sum 1_1 \otimes 1_2)^2 = \sum 1_1 \otimes 1_2$

$$(D_1 \otimes D_2)(a)|v \otimes w\rangle := \sum D_1(a_1)|v\rangle \otimes D_2(a_2)|w\rangle$$

nem ábrázolás $V_1 \otimes V_2$-n csak $\{\sum D_1(1_1)|v\rangle \otimes D_2(1_2)|w\rangle\}$ altéren

hogy monoidális kategóriára vezessen duális objektumokkal:

gyenge Hopf-algebra axiómák [Böhm–Szlachányi]

egyértelmű statisztikus dimenzió ha

véges dimenziós $\mathbb{C}$ fölött

fonáshoz **kvázitriangularitás**

monoidális egység nem $\mathbb{C}$ hanem A szeparábilis Frobenius B részalgebrája

¡ monoidális és duálist őrző felejtő funktor B bimodulus kategóriájába !

Példák

- véges Γ^0 objektum halmazú Γ grupoid által kifeszített $\mathbb{C}\Gamma$ algebra

  - szorzás: $gg' = \left\{ \begin{array}{cl} g \circ g' & \text{ha értelmezett} \\ 0 & \text{egyébként} \end{array} \right\}$ lineáris kiterjesztése
  - $\mathbb{C}\Gamma \to \mathbb{C}\Gamma \otimes \mathbb{C}\Gamma$ koszorzás: $\Gamma \ni g \mapsto g \otimes g$ lineáris kiterjesztése

  ¡ $1 = \sum_{x \in \Gamma^0} 1_x \mapsto \sum_{x \in \Gamma^0} 1_x \otimes 1_x \neq (\sum_{x \in \Gamma^0} 1_x) \otimes (\sum_{x \in \Gamma^0} 1_x) = 1 \otimes 1$!

  egység ábrázolás $\mathbb{C}\Gamma^0$ szeparábilis Frobenius-részalgebrán
- A Lee–Yang-modell rekonstruált szimmetriája $\mathbb{M}_2 \oplus \mathbb{M}_3$ algebrán
- Az Ising-modell rekonstruált szimmetriája $\mathbb{M}_3 \oplus \mathbb{M}_3 \oplus \mathbb{M}_4$ algebrán

  komplex elemű mátrxok algebrája $\uparrow$

VIII. A lejtőn nincs megállás...

további kézenfekvő kérdések — közvetlen fizikai motiváció nélkül

¿milyen struktúra kell egy monoidális és duálist őrző felejtő funktorhoz Rep(A)-ból egy tetszőleges B algebra bimodulus kategóriájába ?

Hopf-algebroid [Takeuchi / Schauenburg / Böhm – Szlachányi]

[**nLab**: Hopf algebroid]

- $\mathbb{C} \to A$ egység helyett $B \otimes B^{\mathrm{op}} \to A$ homomorfizmus
  (⇒ négy kommutáló B-hatás A-n) $\downarrow$ B-bimodulus centruma
- $A \to A \otimes_{\mathbb{C}} A$ homomorfizmus helyett $A \to (A \otimes_B A)^B$
  ¡ a B-bimodulus $A \otimes_B A$ nem algebra — megszorítás a centrumára !

Példák

- gyenge Hopf-algebrák
- minimális: $A = B \otimes B^{\mathrm{op}}$
  - id : $B \otimes B^{\mathrm{op}} \to B \otimes B^{\mathrm{op}}$
  - $B \otimes B^{\mathrm{op}} \to (B \otimes B^{\mathrm{op}}) \otimes_B (B \otimes B^{\mathrm{op}})$, $b \otimes b' \mapsto (b \otimes 1) \otimes_B (1 \otimes b')$

¿milyen struktúrával rendelkezik egy végtelen sok objektumú Γ grupoid által kifeszített algebra ?

szorzó gyenge Hopf-algebra

[Van Daele – Wang / Böhm – Gómez-Torrecillas – López-Centella]

Γ^0 nem véges $\Rightarrow$ **nincs** $\sum_{x\in\Gamma_0} 1_x$ egység elem

csak $\mathbb{C}\Gamma^1$-en ható szorzó operátor értelemben

Köszönöm a figyelmet!