Sajátperdülettel rendelkező test időfejlődése az általános relativitáselméletben

Dr. Keresztes Zoltán, egyetemi docens
Szegedi Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék,
Tisza Lajos krt. 84-86, Szeged 6720
E-mail: zkeresztes@titan.physx.u-szeged.hu

A pontszerű tömeges próbatest geodetikus pályát követ görbült téridőben. A kiterjedt forgó test pályája azonban eltér a geodetikustól, ha a téridő görbület, illetve a spin nagysága számottevő. A szemináriumon először a speciális relativitáselméletben származtatjuk a spinnel rendelkező test mozgását meghatározó egyenletrendszert, majd pedig az általános relativitáselméletben, eljutva a Mathisson–Papapetrou–Dixon-egyenletekhez. A levezetés során áttekintjük a szükséges matematikai eszközöket. A Mathisson–Papapetrou–Dixon-egyenletek a test reprezentatív pontját meghatározó spin mellékfeltétellel záródnak. A spinvektort a Frenkel–Mathisson–Pirani mellékfeltétel esetén vezetjük be, majd származtatjuk annak fejlődésegyenletét a test sajátrendszerében. Végül ezeket az egyenleteket numerikus vizsgálatokban alkalmazzuk.

I. BEVEZETÉS

A sajátperdülettel rendelkező testet kitöltő anyag energia-impulzus tenzorát T_{ab}-vel jelöljük, ennek négyes divergenciája eltűnik:

$$\nabla^a T_{ab} = 0 \ . \tag{1}$$

Egy pontszerű test a téridőben egy világvonalat határoz meg, egy kiterjedt test pontainak összessége pedig egy világcsövet, ahogy az az 1. ábrán látható. A multipól közelítés ötlete az, hogy a kiterjedt test világcsövét egy reprezentatív világvonalra, az energia-impulzus tenzort pedig multipólmomentumok végtelen sorára cseréljük a test fejlődésének leírásában.

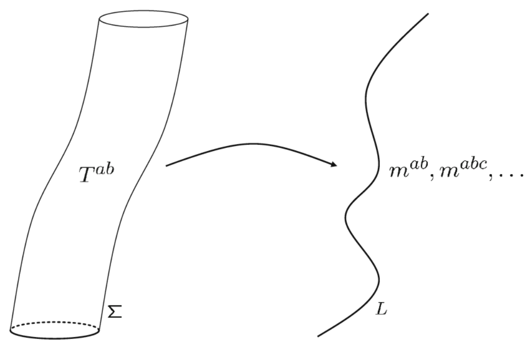

FIG. 1: Baloldalon a test pontjainak téridőbeli mozgása során kirajzolt világcső látható. A test energia-impulzus tenzora ebben a világcsőben különbözik zérustól. A világcsövet a baloldalon látható reprezentatív világvonalra cseréljük, amíg az energia-impulzus tenzort multipól momentumoknak végtelen sorára. [1]

II. SAJÁTPERDÜLETTEL RENDELKEZŐ PRÓBATEST MOZGÁSEGYENLETE A SPECIÁLIS RELATIVITÁSELMÉLETBEN

Speciális relativitáselméletben az impulzus és a spintenzor (ezek a legacsonyabb rendű momentumok) definíciói:

$$p^a = \int_{\Sigma(\tau)} T^{ac}\left(x^d\right) d\Sigma_c \ , \tag{2}$$

illetve

$$S^{ab} = 2\int_{\Sigma(\tau)} \left[x^{[a} - z^{[a}\left(\tau\right)\right] T^{b]c}\left(x^d\right) d\Sigma_c \ . \tag{3}$$

A fenti definícióban Minkowski derékszögű koordinátákat használtunk, τ egy időszerű paraméter, a téridőt $\partial/\partial\tau$-ra merőleges $\Sigma(\tau)$ térszerű hiperfelelületek fóliázzák, és $d\Sigma_c$ ($\propto \partial/\partial\tau$) a térfogatelem $\Sigma(\tau)$-n. Az integrálás az x^a változóra történik, amíg $z^a(\tau)$ a test evolúcióját reprezentáló világvonal. Felmerül a kérdés, hogy a (2) és (3) definíciókban szereplő tenzorok függenek e a $\Sigma(\tau)$ fóliázás megválasztásától?

Válasszunk ki két hiperfelületet Σ'-t és Σ-t, amelyek az egyszerűség kedvéért nem metszik egymást, a világcső közéjük eső téridő régióját pedig jelölje Ω. A világcső Σ' és Σ közötti részének időszerű határán $T^{ab}=0$. Ezért a Gauss-tétel következtében kapjuk, hogy

$$0=\int_\Omega \partial_b T^{ab} d^4x=\int_\Sigma T^{ab}d\Sigma_b-\int_{\Sigma'} T^{ab}d\Sigma_b \ . \tag{4}$$

Mivel p^a nem függ $z^a(\tau)$-tól, ez azt jelenti, hogy

$$\frac{dp^a}{d\tau}=0 \ . \tag{5}$$

Továbbá

$$\frac{\partial}{\partial x^c}\left[x^{[a}-z^{[a}(\tau)\right]T^{b]c}=\frac{\partial}{\partial x^c}x^{[a}T^{b]c}=\frac{\partial x^{[a}}{\partial x^c}T^{b]c}+x^{[a}\frac{\partial T^{b]c}}{\partial x^c}=\delta_c^{[a}T^{b]c}+x^{[a}\frac{\partial T^{b]c}}{\partial x^c}=0 \ ,$$

így

$$0=\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x^c}\left\{\left[x^{[a}-z^{[a}(\tau)\right]T^{b]c}\right\}d^4x=\int_{\Sigma'}\left[x^{[a}-z^{[a}(\tau)\right]T^{b]c}d\Sigma_c-\int_\Sigma\left[x^{[a}-z^{[a}(\tau)\right]T^{b]c}d\Sigma_c \ . \tag{6}$$

Tehát S^{ab} a Σ hiperfelület megválasztásától nem, de $z^a(\tau)$-n keresztül függ τ-tól. A z^a-tól függés:

$$\begin{aligned}\Delta S^{ab} &= S^{ab}(z_2)-S^{ab}(z_1)=2\int_{\Sigma(\tau)}\left[x^{[a}-z_2^{[a}(\tau)\right]T^{b]c}d\Sigma_c-2\int_{\Sigma(\tau)}\left[x^{[a}-z_1^{[a}(\tau)\right]T^{b]c}d\Sigma_c\\ &= 2\left[z_1^{[a}(\tau)-z_2^{[a}(\tau)\right]\int_{\Sigma(\tau)}T^{b]c}d\Sigma_c=2\left[z_1^{[a}(\tau)-z_2^{[a}(\tau)\right]p^{b]}=-2\Delta X^c\delta_c^{[a}p^{b]} \ ,\end{aligned} \tag{7}$$

ahol

$$\Delta X^a=z_2^a(\tau)-z_1^a(\tau) \ .$$

Figyelembe véve, hogy lineáris rendben ΔX^a-ban

$$\Delta S^{ab}=\frac{\partial S^{ab}}{\partial z_1^c}\Delta X^c \ , \tag{8}$$

kapjuk, hogy

$$\partial_c S^{ab}=-2\delta_c^{[a}p^{b]} \ . \tag{9}$$

Ezt kontrahálva

$$u^c=\frac{dz_1^c}{d\tau}\text{-val} \tag{10}$$

a spintenzor mozgásegyenlete:

$$\frac{dS^{ab}}{d\tau}=u^ap^b-p^au^b \ . \tag{11}$$

Összefoglalva, a sajátperdülettel rendelkező test mozgásegyenletrendszere speciális relativitáselméletben:

$$\frac{dp^a}{d\tau}=0 \ , \tag{12}$$

$$\frac{dS^{ab}}{d\tau}=u^ap^b-p^au^b \ . \tag{13}$$

De mi jelöli ki a reprezentatív világvonalat, amelynek az érintője u^a? Egy lehetőség erre a *Tulczyjew-Dixon* [2, 3] spin-mellékfeltétel:

$$p_a S^{ab} = 0 \ . \tag{14}$$

Válasszunk egy olyan koordinátarendszert, amiben $p^a = M\delta_0^a$ alakú, ahol $M^2 = -p^a p_a$ =konstans. Fóliázzuk a téridőt az $x^0 = t$ =kontans felületekkel. A t időt az a megfigyelő méri, amelynek négyessebessége p^a/M. Ezt a rendszert zéró 3-impulzus rendszernek nevezzük. A (3)-as egyenlet a spintenzor definíciójával együtt eredményezi, hogy

$$0 = S^{\alpha 0} = 2\int_{x^0=konst}\left[x^{[\alpha} - z^{[\alpha}(\tau)\right] T^{0]0} dx^1 dx^2 dx^3 \ , \tag{15}$$

ahol $\alpha = 1,\, 2,\, 3$. Mivel

$$2x^{[\alpha}T^{0]0} = x^\alpha T^{00} - tT^{\alpha 0} \ , \ 2z^{[\alpha}T^{0]0} = z^\alpha(t)\, T^{00} - tT^{\alpha 0} \ , \tag{16}$$

így

$$\int_{x^0=konst} x^\alpha T^{00} dx^1 dx^2 dx^3 = z^\alpha(t)\int_{x^0=konst} T^{00} dx^1 dx^2 dx^3 \ , \tag{17}$$

amit átrendezve kapjuk, hogy

$$z^\alpha(t) = \frac{\int_{x^0=konst} x^\alpha T^{00} dx^1 dx^2 dx^3}{\int_{x^0=konst} T^{00} dx^1 dx^2 dx^3} \ . \tag{18}$$

Ez megfelel a tömegközéppont definíciója általánosításának, amit a zéró 3-impulzus redszerben határoztunk meg. A Tulczyjev-Dixon spin-mellékfeltétel helyett választhattuk volna a *Frenkel-Matthisson-Pirani*-t is: $u_a S^{ab} = 0$. Ekkor a reprezentatív világvonal az együttmozgó rendszerben (olyan megfigyelő, akinek a négyessebessége u^a) meghatározott tömegközéppont helyzetét ábrázolja.

III. KITERJEDT PRÓBATEST MOZGÁSEGYENLETE AZ ÁLTALÁNOS RELATIVITÁSELMÉLETBEN

A. Bitenzorok

1. *Relatív helyvektor az általános relativitáselméletben*

Először a momentumok integrál definícióit szükséges általánosítani.[1] A spintenzor definíciójában megjelenik a relatív helyvektor $x^a - z^a(\tau)$. Görbült téridőben e helyvektort felcserélő alkalmas objektum bevezethető a Synge-világfüggvényen keresztül. A Synge-világfüggvény egy biskalár, amely értéke két téridőponttól x^a-tól és x'^a-tól függ. Ezt a két pontot összeköthetjük egy $y^a(\lambda)$ geodetikus görbével, ahol λ egy affine paraméter és $y^a(\lambda_1) = x^a$, illetve $y^a(\lambda_2) = x'^a$. Feltesszük, hogy x^a-t és x'^a-t összekötő geodetikus egyértelmű, ami azt jelenti, hogy konjugált pontok nincsenek a téridő vizsgált tartományában.[2] A világfüggvény [5]:

$$\sigma(x, x') = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} g_{ab}(y(\lambda))\frac{dy^a}{d\lambda}\frac{dy^b}{d\lambda}d\lambda \ , \tag{19}$$

ahol g_{ab} a metrikus tenzor, független az affine paraméter megválasztásától (invaráns a $\lambda = cv + d$ átskálázásra, ahol c és d kontansok). A világfüggvény kovariáns deriváltjait jelölje:

$$\sigma_{aba'b'} = \nabla_a\nabla_b\nabla_{a'}\nabla_{b'}\ \sigma(x, x') \ , \tag{20}$$

---

[1] Az általánosítás nem egységes az irodalomban, itt Dixon a témát érintő korai cikkében [3], illetve Puetzfeld és Obukhov által használt definíciókra támaszkodunk [4].

[2] A vizsgált tartomány a tekintetbe vett test világcsövén belüli régiót fogja jelenteni.

ahol a vesszőtlen index az x^a, amíg a vesszős az x'^a pontban vett deriváltakat jelenti. A (20)-ban lévő kétpont mennyiség egy $(0,2)$-típusú tenzor az x^a pontban és szintén $(0,2)$-típusú tenzor az x'^a-ban. A vesszős és vesszőtlen indexek szerinti kovariáns deriváltak felcserélhetők. Két index esetén ez egyszerűen a különböző pontokbeli parciális deriválások felcserélhetőségét jelenti:

$$\sigma_{aa'} = \partial_a \partial_{a'} \sigma = \partial_{a'} \partial_a \sigma = \sigma_{a'a} \ . \tag{21}$$

Példa: Minkowski-téridőben derékszögű koordinátákban ($y^a = \{t, x, y, z\}$) a geodetikus egyenlet:

$$\frac{d^2 y^a}{d\lambda^2} = 0 \ . \tag{22}$$

Ezt integrálva kapjuk, hogy

$$y^a(\lambda) = V^a(\lambda - \lambda_1) + x^a \ , \tag{23}$$

ahol V^a egy konstans, és $x^a = y^a(\lambda = \lambda_1)$. Így

$$V^a(\lambda - \lambda_1) = y^a(\lambda) - x^a \ , \tag{24}$$

és a világfüggvény

$$\begin{aligned} 2\sigma(x^a, x'^a) &= (\lambda_2 - \lambda_1) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \eta_{ab}(y(\lambda)) \frac{dy^a}{d\lambda} \frac{dy^b}{d\lambda} \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)^2 \left[-\left(V^t\right)^2 + (V^x)^2 + (V^y)^2 + (V^z)^2 \right] \\ &= -(t' - t)^2 + (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \ , \end{aligned} \tag{25}$$

ahol $x'^a = y^a(\lambda = \lambda_2)$ és η_{ab} a metrikus tenzor. A világfüggvény deriváltja az x^a koordináta szerint:

$$\begin{aligned} \sigma_t(x^a, x'^a) &= -(t - t') \ , \ \sigma_x(x^a, x'^a) = x - x' \ , \\ \sigma_y(x^a, x'^a) &= y - y' \ , \ \sigma_z(x^a, x'^a) = z - z' \ . \end{aligned} \tag{26}$$

Ennek indexfelhúzottja:

$$\begin{aligned} \sigma^t(x^a, x'^a) &= t - t' \ , \ \sigma^x(x^a, x'^a) = x - x' \ , \\ \sigma^y(x^a, x'^a) &= y - y' \ , \ \sigma^z(x^a, x'^a) = z - z' \ . \end{aligned} \tag{27}$$

Ez a vektor nem más, mint az x^a pont relatív helyvektora x'^a ponthoz képest. Hasonlóan, véve a világfüggvény deriváltját x'^a koordináta szerint, majd felhúzva az indexeket kapjuk:

$$\begin{aligned} \sigma^{t'}(x^a, x'^a) &= t' - t \ , \ \sigma^{x'}(x^a, x'^a) = x' - x \ , \\ \sigma^{y'}(x^a, x'^a) &= y' - y \ , \ \sigma^{z'}(x^a, x'^a) = z' - z \ . \end{aligned} \tag{28}$$

A világfüggvény kétszeres deriváltjai pedig

$$\sigma_{ab} = -\sigma_{ab'} = \sigma_{a'b'} = \eta_{ab} \ . \tag{29}$$

Térjünk vissza a világfüggvény tetszőleges, konjugált pontokat nem tartalmazó téridő régión történő vizsgálatához. Hajtsunk végre az integrálási úton az $y^a(\lambda)$ függvénynek egy olyan variációját, amely megváltoztatja a geodetikust, így annak végpontjait, de a végpontok λ_2, illetve λ_1 paraméter értékeit nem. Tehát az x^a és x'^a pontokat $y^a(\lambda)$ geodetikus kapcsolja össze, amíg $x^a + \delta x^a$ és $x'^a + \delta x'^a$ pontokat $y^a(\lambda) + \delta y^a(\lambda)$. Továbbá $x^a = y^a(\lambda_1)$, $x'^a = y^a(\lambda_2)$, $x^a + \delta x^a = y^a(\lambda_1) + \delta y^a(\lambda_1)$ és $x'^a + \delta x'^a = y^a(\lambda_2) + \delta y^a(\lambda_2)$. A világfüggvény δx^a-ban és $\delta x'^a$-ban lineáris rendű megváltozása ekkor egyrészt:

$$\delta\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial x^a}\delta x^a + \frac{\partial\sigma}{\partial x'^a}\delta x'^a \ , \tag{30}$$

másrészt pedig:

$$\begin{aligned}\delta\sigma &= \frac{1}{2}(\lambda_2-\lambda_1)\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial y^c}\delta y^c\frac{dy^a}{d\lambda}\frac{dy^b}{d\lambda}d\lambda+\frac{1}{2}(\lambda_2-\lambda_1)\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}g_{ab}\frac{d\delta y^a}{d\lambda}\frac{dy^b}{d\lambda}d\lambda+\frac{1}{2}(\lambda_2-\lambda_1)\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}g_{ab}(y(\lambda))\frac{dy^a}{d\lambda}\frac{d\delta y^b}{d\lambda}d\lambda \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_2-\lambda_1)\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial y^c}\delta y^c\frac{dy^a}{d\lambda}\frac{dy^b}{d\lambda}d\lambda+(\lambda_2-\lambda_1)\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{d}{d\lambda}\left(g_{ab}\frac{dy^b}{d\lambda}\delta y^a\right)d\lambda-(\lambda_2-\lambda_1)\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\delta y^a\frac{d}{d\lambda}\left(g_{ab}\frac{dy^b}{d\lambda}\right)d\lambda \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_2-\lambda_1)\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial y^c}\delta y^c\frac{dy^a}{d\lambda}\frac{dy^b}{d\lambda}d\lambda+(\lambda_2-\lambda_1)\left[g_{ab}\frac{dy^b}{d\lambda}\delta y^a\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}-(\lambda_2-\lambda_1)\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[\delta y^a\frac{\partial g_{ab}}{\partial y^c}\frac{dy^c}{d\lambda}\frac{dy^b}{d\lambda}+\delta y^a g_{ab}\frac{d^2y^b}{d^2\lambda}\right]d\lambda\ .\end{aligned}$$

Felhasználva y^a-ra a geodetikus egyenletet azt találjuk, hogy az első és utolsó tagok kiejtik egymást, ezért

$$\delta\sigma=(\lambda_2-\lambda_1)\left[g_{ab}\frac{dy^b}{d\lambda}\delta y^a\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}\ . \tag{31}$$

Összehasonlítva (30) és (31) egyenleteket:

$$\sigma_a=-g_{ab}\frac{dx^b}{d\lambda}\Delta\lambda\ ,\ \sigma_{a'}=g_{a'b'}\frac{dx'^{b'}}{d\lambda}\Delta\lambda\ , \tag{32}$$

ahol

$$\Delta\lambda=\lambda_2-\lambda_1\ ,\ g_{ab}=g_{ab}(x)\ ,\ g_{a'b'}=g_{a'b'}(x')\ ,\ \frac{dx^b}{d\lambda}=\frac{dy^b}{d\lambda}|_{\lambda=\lambda_1}\ ,\frac{dx'^{b'}}{d\lambda}=\frac{dy^{b'}}{d\lambda}|_{\lambda=\lambda_2}\ . \tag{33}$$

A geodetikus egyenletből ugyanakkor azt is meglehet mutatni, hogy a geodetikus mentén a (19)-ben szereplő integrandus egy konstans, ezért

$$\sigma(x,x')=\frac{1}{2}(\lambda_2-\lambda_1)^2g_{ab}(x)\frac{dx^a}{d\lambda}\frac{dx^b}{d\lambda}=\frac{1}{2}(\lambda_2-\lambda_1)^2g_{a'b'}(x')\frac{dx'^{a'}}{d\lambda}\frac{dx'^{b'}}{d\lambda}\ . \tag{34}$$

Ebből és (32)-ből következik, hogy

$$2\sigma(x,x')=g^{ab}\sigma_a\sigma_b=g^{a'b'}\sigma_{a'}\sigma_{b'}\ . \tag{35}$$

Továbbá $\sigma(x,x')=0$ null geodetikusra, $\sigma(x,x')=-\tau^2/2$ időszerű geodetikusra, amelynek hossza τ, illetve $\sigma(x,x')=l^2/2$ térszerű geodetikusra, amelynek hossza l. Ha a téridőben létezik egy Killing-vektor k^a, akkor $k_a dy^a/d\lambda$ egy konstans a geodetikus mentén. Ezt felhasználva (32)-ből következik, hogy

$$k^a(x)\sigma_a(x,x')+k^{a'}(x')\sigma_{a'}(x,x')=0\ . \tag{36}$$

A $\sigma^a(x,x')$ egy vektor-skalár kétpontmennyiség: skalárként transzformálódik x'^a-ban és vektorként x^a-ban. Továbbá $\sigma^a(x,x')$ az x^a pontban annak a geodetikusnak az érintője, amely összeköti x^a-t x'^a-val; normanégyzete pedig ennek a geodetikusnak a hossznégyzetével arányos. (Az arányossági tényező 1 térszerű és -1 időszerű geodetikusra.) Ezért $\sigma^a(x,x')$-re tekinthetünk úgy, mint az x^a pontnak x'^a ponthoz képesti relatív helyvektorára, lásd 2. ábra. Hasonlóan az $\sigma^{a'}(x,x')$ vektorra pedig tekinthetünk úgy, mint az x'^a pontnak az x^a ponthoz képesti relatív helyvektorára.

Jelöljük egy tetszőleges kétpont tenzor $\mathfrak{T}^{\cdots}_{\cdots}(x',x)$ (bitenzor) $x'^a\to x^a$ határérétékét a következőképpen:

$$\lim_{x'^a\to x^a}\mathfrak{T}^{\cdots}_{\cdots}(x,x')=[\mathfrak{T}^{\cdots}_{\cdots}(x)]\ . \tag{37}$$

Feltesszük, hogy ez a határérték független attól, hogy mely geodetikus mentén vettük (g_{ab} metrika megfelelően sima [5]), ezért a jobboldal csak x^a-tól függ. Nyilván

$$[\sigma]=0\ ,\ [\sigma_a]=0\ ,\ [\sigma_{a'}]=0\ . \tag{38}$$

Vegyük (35) kovariáns deriváltját x^a-ban, ekkor

$$\sigma_c=g^{ab}\sigma_a\sigma_{bc}\ . \tag{39}$$

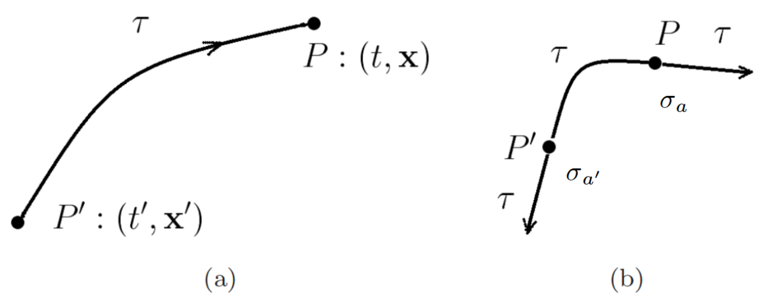

FIG. 2: A baloldalon egy időszerű geodetikus szakasz látható, ahol τ a sajátidő és amely P' pontból indul és P pontban végződik. A jobboldalon a világfüggvény deriváltjai láthatók P'-ben, illetve P-ben, amelyek a P' és P-t összekötő geodetikusnak az érintői a végpontokban. A geodetikus szakasz hossza τ. [6]

Ebből és (32)-ből viszont azt is kapjuk, hogy

$$U^b\left(\sigma_{bc}-g_{bc}\right)=0\ , \tag{40}$$

ahol

$$U^b=\frac{dx^b}{d\lambda}\ . \tag{41}$$

Feltevésünk szerint $x'^a \to x^a$ határértékben σ_{bc} független U^b-tól, így

$$[\sigma_{bc}]=g_{bc}\ . \tag{42}$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$[\sigma_{b'c'}]=g_{bc}\ . \tag{43}$$

Megjegyezzük, hogy torzióval rendelkező konnexió esetén $\sigma_{bc}\neq\sigma_{cb}$-vel, de a különbségük határértékben eltűnik, így (42) érvényes marad [7]. A fentiekből továbbá következnek a

$$[\sigma^a{}_c]=\delta^a_c\ ,\ \left[\sigma^{a'}{}_{c'}\right]=\delta^a_c\ . \tag{44}$$

relációk.

Tekintsük most (39) kifejezést

$$\sigma_a=\sigma_b\sigma^b{}_a\ . \tag{45}$$

Vegyük ennek a kétszeres kovariáns deriváltját x^a-ban:

$$\sigma_{abc}=\sigma_e\sigma^e{}_{abc}+\sigma_{eb}\sigma^e{}_{ac}+\sigma_{ec}\sigma^e{}_{ab}+\sigma_{ebc}\sigma^e{}_a\ . \tag{46}$$

Az $x'\to x$ határértékben:

$$[\sigma_{abc}]=[\sigma_{bac}]+[\sigma_{cab}]+[\sigma_{abc}]\ , \tag{47}$$

vagyis

$$[\sigma_{bac}]+[\sigma_{cab}]=0\ . \tag{48}$$

Torziómentes téridőkben $[\sigma_{bac}]$ az első két indexben szimmetrikus, így kapjuk, hogy

$$[\sigma_{abc}]+[\sigma_{acb}]=0\ . \tag{49}$$

Használjuk fel most a Ricci-azonosságot[3]:

$$\sigma_{acb} - \sigma_{abc} = R_{adcb}\sigma^{d} \ , \tag{50}$$

amivel (49) a következő alakot ölti:

$$2\left[\sigma_{abc}\right] + \left[R_{adcb}\sigma^{d}\right] = 0 \ , \tag{51}$$

így

$$\left[\sigma_{abc}\right] = 0 \tag{52}$$

lesz [9].

Vegyük (45) háromszoros kovariáns deriváltját x^a-ban:

$$\sigma_{abcd} = \sigma_{e}\sigma^{e}{}_{abcd} + \sigma_{ed}\sigma^{e}{}_{abc} + \sigma_{eb}\sigma^{e}{}_{acd} + \sigma_{ebd}\sigma^{e}{}_{ac} + \sigma_{ec}\sigma^{e}{}_{abd} + \sigma_{ecd}\sigma^{e}{}_{ab} + \sigma_{ebc}\sigma^{e}{}_{ad} + \sigma_{ebcd}\sigma^{e}{}_{a} \ . \tag{53}$$

Az $x' \to x$ határértékben:

$$\left[\sigma_{abcd}\right] = \left[\sigma_{dabc}\right] + \left[\sigma_{bacd}\right] + \left[\sigma_{cabd}\right] + \left[\sigma_{abcd}\right] \ , \tag{54}$$

vagyis

$$0 = \left[\sigma_{adbc}\right] + \left[\sigma_{abcd}\right] + \left[\sigma_{acbd}\right] \ . \tag{55}$$

Vegyük az (50) Ricci-azonosság deriváltját:

$$\sigma_{acbd} - \sigma_{abcd} = \left(\nabla_{d}R_{ascb}\right)\sigma^{s} + R_{ascb}\sigma^{s}{}_{d} \ , \tag{56}$$

ami az $x' \to x$ határértékben:

$$\left[\sigma_{acbd}\right] - \left[\sigma_{abcd}\right] = R_{adcb} \ . \tag{57}$$

Hasonlóan:

$$\sigma_{adbc} - \sigma_{abdc} = \nabla_{c}R_{asdb}\sigma^{s} + R_{asdb}\sigma^{s}{}_{c} \ , \tag{58}$$

így

$$\left[\sigma_{adbc}\right] - \left[\sigma_{abdc}\right] = R_{acdb} \ . \tag{59}$$

Használjuk most a következő azonosságot:

$$\sigma_{abcd} - \sigma_{abdc} = R_{ascd}\sigma^{s}{}_{b} + R_{bscd}\sigma_{a}{}^{s} \ , \tag{60}$$

ami az $x' \to x$ határértékben:

$$\left[\sigma_{abcd}\right] - \left[\sigma_{abdc}\right] = R_{abcd} + R_{bacd} = 0 \ . \tag{61}$$

Végül (55) a következő alakot ölti:

$$0 = 3\left[\sigma_{abcd}\right] + R_{adcb} + R_{acdb} \ , \tag{62}$$

avagy ([9])

$$\left[\sigma_{abcd}\right] = -\frac{1}{3}\left(R_{adcb} + R_{acdb}\right) \ . \tag{63}$$

---

[3] Itt az R_{abcd} Riemann tenzor következő definícióját használjuk: $2\nabla_{[a}\nabla_{b]}T^{c}{}_{d} = R^{c}{}_{eab}T^{e}{}_{d} - R^{e}{}_{dab}T^{c}{}_{e}$, ahol $T^{c}{}_{d}$ tetszőleges vegyes indexű tenzor. E formulából már tetszőleges indexű tenzorra következik, hogy annak antiszimmetrizált kétszeres kovariáns deriváltja hogyan fejezhető ki a Riemann tenzorral [8].

2. Párhuzamos eltolás bivektor

Legyen $y^a(\lambda)$ egy geodetikus görbe, amely összekapcsolja az $x^a = y^a(\lambda_1)$ és $x'^a = y^a(\lambda_2)$ pontokat, továbbá vezessünk be egy $e^a_{\mathbf{A}}(\lambda)$ $(\mathbf{A} = 0,..,3)$ ortonormált bázist, tetrádot, amely párhuzamosan eltolt a geodetikus mentén:

$$g_{ab}e^a_{\mathbf{A}}e^b_{\mathbf{B}} = \eta_{\mathbf{AB}} \ , \quad \frac{De^a_{\mathbf{A}}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{dy^b}{d\lambda}\nabla_b e^a_{\mathbf{A}} = 0 \ , \tag{64}$$

ahol $\eta_{\mathbf{AB}} = diag(-1,1,1,1)$ a metrikus tenzor a Minkowski téridőn. Az első reláció kontrakciója $\eta^{\mathbf{BC}}$-vel adja, hogy

$$\delta^{\mathbf{C}}_{\mathbf{A}} = e^a_{\mathbf{A}}g_{ab}e^b_{\mathbf{B}}\eta^{\mathbf{BC}} = e^a_{\mathbf{A}}e^{\mathbf{C}}_a \ , \tag{65}$$

ahol bevezettük:

$$e^{\mathbf{C}}_a = \eta^{\mathbf{BC}}g_{ab}e^b_{\mathbf{B}}\text{-t} \ , \tag{66}$$

amely az $e^a_{\mathbf{A}}$ duális bázisa. A (66) reláció inverze:

$$e^c_{\mathbf{A}} = \eta_{\mathbf{AC}}g^{ac}e^{\mathbf{C}}_a \ . \tag{67}$$

A (65) $e^b_{\mathbf{C}}$-vel történő kontrakciójából:

$$e^b_{\mathbf{A}} = \delta^{\mathbf{C}}_{\mathbf{A}}e^b_{\mathbf{C}} = e^a_{\mathbf{A}}e^{\mathbf{C}}_a e^b_{\mathbf{C}} \ , \tag{68}$$

ami mutatja, hogy

$$e^{\mathbf{C}}_a e^b_{\mathbf{C}} = \delta^b_a \ . \tag{69}$$

Ennek kontrakciója g^{ac}-vel adja, hogy

$$g^{bc} = e^{\mathbf{C}}_a e^b_{\mathbf{C}}g^{ac} = \eta^{\mathbf{BC}}g_{ab}e^b_{\mathbf{B}}e^b_{\mathbf{C}}g^{ac} = \eta^{\mathbf{BC}}e^b_{\mathbf{B}}e^c_{\mathbf{C}} \ , \tag{70}$$

illetve g_{bc}-vel való kontrakciója, hogy

$$g_{ac} = e^{\mathbf{C}}_a e^b_{\mathbf{C}}g_{bc} = e^{\mathbf{C}}_a\eta_{\mathbf{CD}}g^{bd}e^{\mathbf{D}}_d g_{bc} = e^{\mathbf{C}}_a e^{\mathbf{D}}_c\eta_{\mathbf{CD}} \ . \tag{71}$$

Továbbá $e^b_{\mathbf{C}}$ valóban bázis, mert tetszőleges V^a vektor esetén:

$$V^a = V^b\delta^a_b = V^b e^{\mathbf{C}}_b e^a_{\mathbf{C}} = V^{\mathbf{C}}e^a_{\mathbf{C}} \ , \tag{72}$$

ahol bevezettük a vektor tetrád komponensét:

$$V^{\mathbf{C}} = V^b e^{\mathbf{C}}_b \ . \tag{73}$$

Ha a V^b vektor párhuzamosan eltolt a geodetikus mentén, akkor a $V^{\mathbf{C}}$ tetrád komponensek konstansok. Ezért

$$V^{a'}(x') = \left[V^b(x)e^{\mathbf{C}}_b(x)\right]e^{a'}_{\mathbf{C}}(x') = V^b(x)\,\mathfrak{g}^{a'}{}_b(x,x') \ , \tag{74}$$

ahol

$$\mathfrak{g}^{a'}{}_b(x,x') \equiv e^{\mathbf{C}}_b(x)\,e^{a'}_{\mathbf{C}}(x') \tag{75}$$

a párhuzamos eltolás bivektor. Ez a bivektor párhuzamosan eltolja az x pontban lévő $V^b(x)$ vektort az x' pontba [5]. A (75)-ben $e^{\mathbf{C}}_b(x)$ és $e^{a'}_{\mathbf{C}}(x')$ sorrendje megcserélhető, így $\mathfrak{g}^{a'}{}_b(x,x')$-ben az indexek, illetve az argumentumban x és x' felcserélhetők.

3. A bitenzorok egy pont körüli végtelen sor alakú kifejtései

A Taylor-sorfejtés általánosítását keressük, amit itt kétindexes tenzorra tárgyalunk [9] referencia alapján. A keresett sor

$$\Omega_{ab}(x,x') = A_{ab}(x) + A_{abc}(x)\,\sigma^c(x,x') + \frac{1}{2}A_{abcd}(x)\,\sigma^c(x,x')\,\sigma^d(x,x') + ... \tag{76}$$

alakú. A nulladrendű tag

$$A_{ab}(x) = [\Omega_{ab}(x,x')] \ . \tag{77}$$

Az első rendű tag, (76) ∇_e-kovariáns deriváltjából következik. Elvégezve a differenciálást és véve az $x' \to x$ határértéket:

$$[\nabla_e \Omega_{ab}(x,x')] = \nabla_e A_{ab}(x) + A_{abe}(x) \ , \tag{78}$$

amiből

$$A_{abc}(x) = [\nabla_c \Omega_{ab}(x,x')] - \nabla_c [\Omega_{ab}(x,x')] \ . \tag{79}$$

A másodrendű tag, (76) $\nabla_f \nabla_e$-kovariáns deriváltjából következik. Elvégezve a differenciálásokat és véve az $x' \to x$ határértéket kapjuk, hogy

$$[\nabla_f \nabla_e \Omega_{ab}(x,x')] = \nabla_f \nabla_e A_{ab}(x) + \nabla_e A_{abf}(x) + \nabla_f A_{abe}(x) + A_{ab(ef)}(x) \ . \tag{80}$$

Így

$$\begin{aligned} A_{ab(cd)}(x) &= [\nabla_d \nabla_c \Omega_{ab}(x,x')] - \nabla_d \nabla_c [\Omega_{ab}(x,x')] - \nabla_c [\nabla_d \Omega_{ab}(x,x')] \\ &\quad + \nabla_c \nabla_d [\Omega_{ab}(x,x')] - \nabla_d [\nabla_c \Omega_{ab}(x,x')] + \nabla_d \nabla_c [\Omega_{ab}(x,x')] \\ &= [\nabla_d \nabla_c \Omega_{ab}(x,x')] - \nabla_c [\nabla_d \Omega_{ab}(x,x')] - \nabla_d [\nabla_c \Omega_{ab}(x,x')] + \nabla_c \nabla_d [\Omega_{ab}(x,x')] \ . \end{aligned} \tag{81}$$

Példa: $\Omega_{ab}(x,x') = \sigma_{ab}(x,x')$, ekkor

$$A_{ab}(x) = [\sigma_{ab}(x,x')] = g_{ab} \ , \tag{82}$$

$$A_{abc}(x) = [\sigma_{abc}(x,x')] - \nabla_c [\sigma_{ab}(x,x')] = 0 \ , \tag{83}$$

$$\begin{aligned} A_{ab(cd)}(x) &= [\sigma_{abcd}(x,x')] - \nabla_c [\sigma_{abd}(x,x')] - \nabla_d [\sigma_{abc}(x,x')] + \nabla_c \nabla_d [\sigma_{ab}(x,x')] \\ &= [\sigma_{abcd}(x,x')] = -\frac{1}{3}(R_{adcb} + R_{acdb}) \ . \end{aligned} \tag{84}$$

Ezért

$$\nabla_b \sigma_a(x,x') = \sigma_{ab}(x,x') = g_{ab} - \frac{1}{6}(R_{adcb} + R_{acdb})\,\sigma^c(x,x')\,\sigma^d(x,x') + ... \ . \tag{85}$$

B. Kiterjedt test multipólmomentumai és azok fejlődés egyenletei

A kiterjedt test világcsövét cseréljük fel egy reprezentatív $x^a(\tau)$ világvonalra, amelynek érintője

$$u^a = \frac{dx^a(\tau)}{d\tau} \ . \tag{86}$$

Válasszuk az $u^a u_a = -1$ normálást, ami azt jelenti, hogy a görbe τ affin paramétere a sajátidő. A testet az energia-impulzusa helyett az alábbi multipólmomentumokkal jellemezzük:

$$p^{y_1 \dots y_n y_0} \equiv (-1)^n \int_{\Sigma(\tau)} \sigma^{y_1} ... \sigma^{y_n} \mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_0} \mathcal{T}^{x'_0 x'_1} d\Sigma_{x'_1} \ , \tag{87}$$

$$t^{y_2...y_{n+1}y_0y_1} \equiv (-1)^n \int_{\Sigma(\tau)} \sigma^{y_2}...\sigma^{y_{n+1}} \mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_0} \mathfrak{g}^{y_1}_{\ x'_1} \mathcal{T}^{x'_0x'_1} w^{x'_2} d\Sigma_{x'_2} \ . \tag{88}$$

A baloldalon szereplő tenzorok az $x^a(\tau)$ reprezentatív világvonal mentén fejlődnek. A 3-dimenziós integrálási felületet az olyan térszerű geodetikusok feszítik ki, amelynek $\sigma^{y_1}(x', x)$ az érintője, és az $x^a(\tau)$ világvonalat merőlegesen metszik: $u_a\sigma^a(x', x) = 0$. Az integrálási pontot x'^a jelöli, a vesszős absztrakt indexek e pontban jelölik a tenzor típusát, amíg a vesszőtlenek az x^a pontban. Ha $dx_1'^a$, $dx_2'^a$, dx_3^a jelöl 3 egymástól lineárisan független infinitezimális koordináta differenciált a $\Sigma(\tau)$ felületen, akkor

$$d\Sigma_a = \epsilon_{abcd} dx_1'^a dx_2'^a dx_3'^a \ , \tag{89}$$

ahol ϵ_{abcd} a 4-dimenziós Levi-Civita szimbólum, ami teljesen antiszimmetrikus és $\epsilon_{0123} = 1$. Az integrandusban szereplő $\mathcal{T}^{x'_0x'_1}$ az energia-impulzus tenzorsűrűség:

$$\mathcal{T}^{x'_0x'_1}(x') = \sqrt{|g(x')|} T^{x'_0x'_1}(x') \ , \tag{90}$$

amely az integrálási pontban van kiértékelve. Végül $w^{x'_2}(x')$ a $\Sigma(\tau)$ felület pontjait egy későbbi τ' időpillanatbeli $\Sigma(\tau')$ felület pontjaiba átvivő folyamhoz társított érintővektormező, amely szintén az integrálási pontban van kiértékelve. A (87) és (88) integrandusaiban szereplő mennyiségek közül $\mathcal{T}^{x'_0x'_1}(x')$ egy $(2,0)$-típusú 1-pont tenzorsűrűség, $w^{x'_2}(x')$ egy $(1,0)$-típusú 1-pont vektormező, $\sigma^{y_1}(x', x)$ 2-pont vektor-skalár-mező, amely $(1,0)$-típusú tenzor x^a-ban és skalár x'^a-ban (az x^a relatív helyvektora x'^a-hoz képest), végül $\mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_0}(x', x)$ egy 2-pont vektor-kovector-mező, amely $(1,0)$-típusú tenzor x^a-ban és $(0,1)$-típusú x'^a-ban (az x'^a-ban lévő vektort párhuzamosan eltolja x^a pontba). Ezért például a (87) egyenlet integrandusában megjelenő $\sigma^{y_1}...\sigma^{y_n}\mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_0}\mathcal{T}^{x'_0x'_1}$ mennyiség egy 2-pont tenzor-tenzorsűrűség, amely $(n+1,0)$-típusú tenzor x^a-ban és $(1,0)$ típusú tenzorsűrűség x'^a pontban.

A multipólmomentumokra vonatkozó egyenletek származtatása az alábbi tételen alapul (lásd (5.7) egyenletet [3]-ban):

$$\begin{aligned} \frac{D}{d\tau} \int_{\Sigma(\tau)} \sigma^{y_1}...\sigma^{y_n} \mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_0} \mathcal{T}^{x'_0x'_1} d\Sigma_{x'_1} &= \int_{\Sigma(\tau)} \nabla_{x'_1} \left(\sigma^{y_1}...\sigma^{y_n} \mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_0} \mathcal{T}^{x'_0x'_1} \right) w^{x'_2} d\Sigma_{x'_2} \\ &+ \int_{\Sigma(\tau)} u^{y_{n+1}} \nabla_{y_{n+1}} \left(\sigma^{y_1}...\sigma^{y_n} \mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_0} \mathcal{T}^{x'_0x'_1} \right) d\Sigma_{x'_1} \ , \end{aligned} \tag{91}$$

ahol $D/d\tau \equiv u^c\nabla_c$. A jobboldal kiértékeléséhez a σ^a és $\mathfrak{g}^a_{\ b'}$ bitenzorok kovariáns deriváltjainak x^a-ban való kifejtéseit kell alkalmazni [alábbi (93)-(96) formulák], továbbá az energia-impulzus tenzor négyes divergenciájának eltűnéséből származó alábbi kifejezést:

$$\nabla_{x'_1} \mathcal{T}^{x'_0x'_1} = 0 \ . \tag{92}$$

A deriváltak kiértékeléséhez a következő kifejtéseket kell alkalmazni: (néhány további eredmény [4]-ben található):

$$\sigma^{y_0}_{\ x'_1} = \mathfrak{g}^a_{\ x'_1} \left(-\delta^{y_0}_{\ a} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \alpha^{y_0}_{\ a y_2 .. y_{k+1}} \sigma^{y_2} \cdots \sigma^{y_{k+1}} \right) \ , \tag{93}$$

$$\sigma^{y_0}_{\ y_1} = \delta^{y_0}_{\ y_1} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \beta^{y_0}_{\ y_1 y_2 ... y_{k+1}} \sigma^{y_2} \cdots \sigma^{y_{k+1}} \ , \tag{94}$$

$$\nabla_{x'_2} \mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_1} = \mathfrak{g}^a_{\ x'_1} \mathfrak{g}^b_{\ x'_2} \left(\frac{1}{2} R^{y_0}_{\ a b y_3} \sigma^{y_3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{y_0}_{\ a b y_3 ... y_{k+2}} \sigma^{y_3} \cdots \sigma^{y_{k+2}} \right) , \tag{95}$$

$$\nabla_{y_2} \mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_1} = \mathfrak{g}^a_{\ x'_1} \left(\frac{1}{2} R^{y_0}_{\ a y_2 y_3} \sigma^{y_3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{y_0}_{\ a y_2 y_3 ... y_{k+2}} \sigma^{y_3} \cdots \sigma^{y_{k+2}} \right) . \tag{96}$$

Az α, β, γ együtthatók a Riemann tenzortól és annak kovariáns deriváltjaitól függenek. Az első néhány tag:

$$\alpha^{y_0}_{\ y_1 y_2 y_3} = -\frac{1}{3} R^{y_0}_{\ (y_2 y_3) y_1} \ ,$$

$$\beta^{y_0}_{\ y_1y_2y_3} = \frac{2}{3}R^{y_0}_{\ (y_2y_3)y_1} \ ,$$

$$\alpha^{y_0}_{\ y_1y_2y_3y_4} = -\frac{1}{2}\nabla_{(y_2}R^{y_0}_{\ y_3y_4)y_1} \ ,$$

$$\beta^{y_0}_{\ y_1y_2y_3y_4} = \frac{1}{2}\nabla_{(y_2}R^{y_0}_{\ y_3y_4)y_1} \ ,$$

$$\gamma^{y_0}_{\ y_1y_2y_3y_4} = \frac{1}{3}\nabla_{(y_3}R^{y_0}_{\ |y_1|y_4)y_2} \ . \tag{97}$$

(Vesd össze (94) index lehúzottját a (85) eredménnyel.)

A multipólegyenletek származtatásához először kifejtjük a (91) egyenlet jobboldalának első tagját, alkalmazva (93)-(96) kifejezéseket:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma(\tau)} \nabla_{x'_1}\left(\sigma^{y_1}...\sigma^{y_n}\mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_0}\mathcal{T}^{x'_0x'_1}\right)w^{x'_2}d\Sigma_{x'_2} = \int_{\Sigma(\tau)} \mathcal{T}^{x'_0x'_1}\nabla_{x'_1}\left(\sigma^{y_1}...\sigma^{y_n}\mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_0}\right)w^{x'_2}d\Sigma_{x'_2} \\
= &\sum_{s=1}^{n}\int_{\Sigma(\tau)} \sigma^{y_1}...\sigma^{y_{s-1}}\sigma^{y_{s+1}}...\sigma^{y_n}\mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_0}\mathcal{T}^{x'_0x'_1}\nabla_{x'_1}\left(\sigma^{y_s}\right)w^{x'_2}d\Sigma_{x'_2} + \int_{\Sigma(\tau)} \sigma^{y_1}...\sigma^{y_n}\mathcal{T}^{x'_0x'_1}\nabla_{x'_1}\left(\mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_0}\right)w^{x'_2}d\Sigma_{x'_2} \\
= &-\sum_{s=1}^{n}\int_{\Sigma(\tau)} \sigma^{y_1}...\sigma^{y_{s-1}}\sigma^{y_{s+1}}...\sigma^{y_n}\mathfrak{g}^{y_s}_{\ x'_1}\mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_0}\mathcal{T}^{x'_0x'_1}w^{x'_2}d\Sigma_{x'_2} \\
&+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\alpha^{y_s}_{\ \ rz_2...z_{k+1}}\int_{\Sigma(\tau)} \sigma^{z_2}...\sigma^{z_{k+1}}\sigma^{y_1}...\sigma^{y_{s-1}}\sigma^{y_{s+1}}...\sigma^{y_n}\mathfrak{g}^{r}_{\ x'_1}\mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_0}\mathcal{T}^{x'_0x'_1}w^{x'_2}d\Sigma_{x'_2} \\
&-\frac{1}{2}R^{y_0}_{\ \ qrz_3}\int_{\Sigma(\tau)} \sigma^{z_3}\sigma^{y_1}...\sigma^{y_n}\mathfrak{g}^{q}_{\ x'_0}\mathfrak{g}^{r}_{\ x'_1}\mathcal{T}^{x'_0x'_1}w^{x'_2}d\Sigma_{x'_2} \\
&+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\gamma^{y_0}_{\ \ qrz_3...z_{k+2}}\int_{\Sigma(\tau)} \sigma^{z_3}...\sigma^{z_{k+2}}\sigma^{y_1}...\sigma^{y_n}\mathfrak{g}^{q}_{\ x'_0}\mathfrak{g}^{r}_{\ x'_1}\mathcal{T}^{x'_0x'_1}w^{x'_2}d\Sigma_{x'_2} \\
= &-\sum_{s=1}^{n}(-1)^{n-1}t^{y_1\cdots y_{s-1}y_{s+1}\cdots y_ny_sy_0} + \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\alpha^{y_s}_{\ rz_2...z_{k+1}}(-1)^{k+n-1}t^{z_2\cdots z_{k+1}y_1\cdots y_{s-1}y_{s+1}\cdots y_nry_0} \\
&-\frac{1}{2}R^{y_0}_{\ \ qrz_3}(-1)^{n+1}t^{z_3y_1\cdots y_nqr} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\gamma^{y_0}_{\ qrz_3...z_{k+2}}(-1)^{k+n}t^{z_3\cdots z_{k+2}y_1\cdots y_nqr} \ ,
\end{aligned}$$

majd a második tagját:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma(\tau)} u^{y_{n+1}}\nabla_{y_{n+1}}\left(\sigma^{y_1}...\sigma^{y_n}\mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_0}\mathcal{T}^{x'_0x'_1}\right)d\Sigma_{x'_1} = \int_{\Sigma(\tau)} \mathcal{T}^{x'_0x'_1}u^{y_{n+1}}\nabla_{y_{n+1}}\left(\sigma^{y_1}...\sigma^{y_n}\mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_0}\right)d\Sigma_{x'_1} \\
= &\sum_{s=1}^{n}\int_{\Sigma(\tau)} \sigma^{y_1}...\sigma^{y_{s-1}}\sigma^{y_{s+1}}...\sigma^{y_n}\mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_0}\mathcal{T}^{x'_0x'_1}u^{y_{n+1}}\nabla_{y_{n+1}}\left(\sigma^{y_s}\right)d\Sigma_{x'_1} + \int_{\Sigma(\tau)} \sigma^{y_1}...\sigma^{y_n}\mathcal{T}^{x'_0x'_1}u^{y_{n+1}}\nabla_{y_{n+1}}\left(\mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_0}\right)d\Sigma_{x'_1} \\
= &\sum_{s=1}^{n}u^{y_s}\int_{\Sigma(\tau)} \sigma^{y_1}...\sigma^{y_{s-1}}\sigma^{y_{s+1}}...\sigma^{y_n}\mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_0}\mathcal{T}^{x'_0x'_1}d\Sigma_{x'_1} \\
&-\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}u^{z_1}\beta^{y_s}_{\ z_1...z_{k+1}}\int_{\Sigma(\tau)} \sigma^{z_2}...\sigma^{z_{k+1}}\sigma^{y_1}...\sigma^{y_{s-1}}\sigma^{y_{s+1}}...\sigma^{y_n}\mathfrak{g}^{y_0}_{\ x'_0}\mathcal{T}^{x'_0x'_1}d\Sigma_{x'_1} \\
&-\frac{1}{2}R^{y_0}_{\ qsz_3}u^s\int_{\Sigma(\tau)} \sigma^{z_3}\sigma^{y_1}...\sigma^{y_n}\mathfrak{g}^{q}_{\ x'_0}\mathcal{T}^{x'_0x'_1}d\Sigma_{x'_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}u^r\gamma^{y_0}_{\ qrz_3...z_{k+2}}\int_{\Sigma(\tau)} \sigma^{z_3}...\sigma^{z_{k+2}}\sigma^{y_1}...\sigma^{y_n}\mathfrak{g}^{q}_{\ x'_0}\mathcal{T}^{x'_0x'_1}d\Sigma_{x'_1} \\
= &\sum_{s=1}^{n}(-1)^{n-1}u^{y_s}p^{y_1\cdots y_{s-1}y_{s+1}\cdots y_ny_0} - \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n-1}}{k!}u^{z_1}\beta^{y_s}_{\ z_1...z_{k+1}}p^{z_2\cdots z_{k+1}y_1\cdots y_{s-1}y_{s+1}\cdots y_ny_0} \\
&-\frac{1}{2}R^{y_0}_{\ qrz_3}u^r(-1)^{n+1}p^{z_3y_1\cdots y_nq} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{k!}u^r\gamma^{y_0}_{\ qrz_3...z_{k+2}}p^{z_3\cdots z_{k+2}y_1\cdots y_nq} \ .
\end{aligned}$$

Végül a következő egyenletrendszerhez jutunk [4]:

$$\begin{aligned}\frac{D}{d\tau}p^{y_1\dots y_n y_0} &= \sum_{s=1}^{n}\left(t^{y_1\dots y_{s-1}y_{s+1}\dots y_n y_s y_0} - u^{y_s}p^{y_1\dots y_{s-1}y_{s+1}\dots y_n y_0}\right) + \frac{1}{2}R^{y_0}{}_{qrz_3}\left(p^{z_3 y_1\dots y_n q}u^r + t^{z_3 y_1\dots y_n qr}\right)\\ &+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left[-\sum_{s=1}^{n}\alpha^{y_s}{}_{rz_2\dots z_{k+1}}t^{z_2\dots z_{k+1}y_1\dots y_{s-1}y_{s+1}\dots y_n r y_0} + \sum_{s=1}^{n}u^{z_1}\beta^{y_s}{}_{z_1\dots z_{k+1}}p^{z_2\dots z_{k+1}y_1\dots y_{s-1}y_{s+1}\dots y_n y_0}\right.\\ &\left.+\gamma^{y_0}{}_{qrz_3\dots z_{k+2}}\left(u^r p^{z_3\dots z_{k+2}y_1\dots y_n q} + t^{z_3\dots z_{k+2}y_1\dots y_n qr}\right)\right] \ . \end{aligned} \tag{98}$$

Ez az egyenletrendszer nem zárt, a $t^{y_2\cdots y_{n+1}y_0y_1}$ momentumokra nincsenek fejlődési egyenletek.

C. Geodetikus egyenlet

Az előző alfejezetben származtatott (98)-as egyenletrendszert vizsgáljuk σ^a-ban nulladrendben, vagyis minden tagot elhanyagolunk, amiben σ^a megjelenik. A nem azonosan nulla egyenleteket (98) $n = 0$ és $n = 1$ esetei adják:

$$\frac{Dp^a}{d\tau} = 0 \ , \ t^{ab} = u^a p^b \ . \tag{99}$$

A momentumok végtelen sorának csonkítása következtében a második egyenlet megadja a t^{ab} momentumot az u^a és p^b függvényében. Mivel $t^{[ab]} = 0$, következik, hogy $u^{[a}p^{b]} = 0$, amiből pedig $p^a = mu^a$, ahol $m = -u_a p^a$ (a test sajátrendszerében mért tömege). Ezeket felhasználva, az első egyenlet u_a-val történő kontrakciója adja, hogy

$$\frac{Dm}{d\tau} = 0 \ , \tag{100}$$

ami pedig a

$$\frac{Du^a}{d\tau} = 0 \tag{101}$$

geodetikus egyenlethez vezet. *Tehát a tömeges próbatestek mozgására vonatkozó geodetikus egyenlet az energia-impulzus tenzor négyes divergenciájának eltűnéséből következik.*

D. Mathisson–Papapetrou–Dixon-egyenletek

Következő lépésben a (98)-as egyenletrendszert σ^a-ban elsőrendben vizsgáljuk. Ekkor minden olyan tagot elhanyagolunk, amely σ^a-ban négyzetes vagy magasabb rendű. A nem azonosan nulla egyenleteket (98) $n = 0$, $n = 1$ és $n = 2$ esetei adják. Tekintsük először az $n = 2$-őt, ekkor (98) az alábbira egyszerűsödik:

$$t^{(bc)a} = u^{(b}p^{c)a} \ . \tag{102}$$

Ez megadja $t^{(bc)a}$-t u^a és p^{ab} függvényében. Az $n = 1$-re pedig kapjuk, hogy

$$\frac{Dp^{ba}}{d\tau} = t^{ba} - u^b p^a. \tag{103}$$

Mivel t^{ba}-re nem lesz fejlődési egyenletünk, így zárt rendszert csak a fenti kifejezés antiszimmetrikus részéből remélhetünk, hiszen $t^{[ba]} = 0$. Bevezetve $S^{ba} = 2p^{[ba]}$-t (103) adja, hogy

$$\frac{DS^{ab}}{d\tau} = p^a u^b - p^b u^a \ . \tag{104}$$

Végül $n = 0$-ra (98) az alábbivá válik:

$$\frac{Dp^a}{d\tau} = \frac{1}{2}R^a{}_{cbd}\left(p^{dc}u^b + t^{dcb}\right) \ . \tag{105}$$

Mivel $t^{d[cb]} = 0$, így $R_{acbd}t^{cdb}/2 = 0$, amit hozzáadva a jobboldalhoz és felhasználva (102)-őt:

$$\frac{Dp^a}{d\tau} = \frac{1}{2}R^a{}_{cbd}\left(p^{dc}u^b + t^{(dc)b}\right) = \frac{1}{2}R^a{}_{cbd}\left(p^{dc}u^b + 2u^{(d}p^{c)b}\right) \tag{106}$$

lesz. A jobboldalt az alábbi módon alakíthatjuk tovább:

$$R_{abcd}\left(p^{db}u^c + u^dp^{bc} + u^bp^{dc}\right) = \left(R_{abcd} + R_{adbc} + R_{acbd}\right)p^{db}u^c = -R_{acdb}\left(2p^{[db]}\right)u^c \ , \tag{107}$$

ahol a második egyenlőségnél az

$$R_{abcd} + R_{adbc} + R_{acdb} = 0$$

azonosságot használtuk.

Összefoglalva az eredményeket, végül a Mathisson–Papapetrou–Dixon-egyenletekhez (MPD-egyenletek) jutunk [3, 10–14]:

$$\frac{Dp^a}{d\tau} = -\frac{1}{2}R^a{}_{bcd}u^bS^{cd} \equiv F^a \ , \tag{108}$$

$$\frac{DS^{ab}}{d\tau} = p^au^b - p^bu^a \ . \tag{109}$$

Ez az egyenletrendszer sem zárt, mert nem tudjuk u^b kapcsolatát p^a-val, illetve S^{ab}-vel. A (109) egyenlet u_b-vel való kontrakciója:

$$p^a = mu^a - u_b\frac{DS^{ab}}{d\tau} \ , \tag{110}$$

ahol $m = -u_ap^a$, ami az u^a négyessebességgel mozgó megfigyelő nyugalmi rendszerében mért tömege a testnek. A (110) kifejezést visszahelyettesítve (109)-be kapjuk, hogy

$$\frac{DS^{ab}}{d\tau} = u^au_c\frac{DS^{bc}}{d\tau} - u_c\frac{DS^{ac}}{d\tau}u^b \ . \tag{111}$$

(Papapetrou ebben a formában kapta meg a spintenzor mozgásegyenletét [11].)

E. Mathisson–Papapetrou–Dixon-egyenletek a Frenkel-Mathisson-Pirani spin-mellékfeltétellel

A Frenkel-Mathisson-Pirani (FMP) spin-mellékfeltétel [10, 15, 16]:

$$u_aS^{ab} = 0 \ , \tag{112}$$

amit felhasználva (110) az alábbi alakba írható:

$$p^a = mu^a + S^{ab}a_b \ , \tag{113}$$

ahol $a^a \equiv Du^a/d\tau$. A (112) mellékfeltétellel két integrálási konstans származtatható az MPD-egyenletekből ([17]). Az egyiket a (109) egyenlet S_{ab}-vel történő kontrakciója adja:

$$\frac{D}{d\tau}\left(S_{ab}S^{ab}\right) = 0 \ . \tag{114}$$

A másikat pedig a következő számolás:

$$\begin{aligned}\frac{dm}{d\tau} &= -\frac{D}{d\tau}\left(u_ap^a\right) = -u_a\frac{Dp^a}{d\tau} - p^a\frac{Du_a}{d\tau} = \frac{1}{2}R^a{}_{bcd}u^bS^{cd}u_a - p^aa_a \\ &= -mu^aa_a + u_ba_a\frac{DS^{ab}}{d\tau} = u_ba_a\frac{DS^{ab}}{d\tau} = -S^{ab}a_a\frac{Du_b}{d\tau} = -S^{ab}a_aa_b = 0 \ .\end{aligned} \tag{115}$$

Ebből a levezetésből az is következik, hogy $p^aa_a = 0$.

A spin-mellékfeltétel a spintenzor független komponenseinek számát háromra csökkenti, amelyek paraméterezésére érdemes bevezetni egy u^a-ra merőleges spinvektort [17]:

$$s^a = -\frac{1}{2}\eta^{abcd}u_b S_{cd} \ , \tag{116}$$

ahol η_{abcd} a 4-dimenziós Levi-Civita tenzor, ami teljesen antiszimmetrikus és $\eta_{0123} = \sqrt{-g}$. Az inverz kifejezés

$$S^{ab} = \eta^{ab}{}_{cd}u^c s^d \ , \tag{117}$$

ami az

$$\eta_{abcd}\eta^{abkl} = -4\delta^k_{[c}\delta^l_{d]} = 2\left(\delta^k_d\delta^l_c - \delta^k_c\delta^l_d\right) \ , \tag{118}$$

azonosságból következik, hiszen

$$-\frac{1}{2}\eta^{efab}u_f S_{ab} = -\frac{1}{2}\eta^{efab}\eta_{abcd}u_f u^c s^d = -\left(\delta^e_d\delta^f_c - \delta^e_c\delta^f_d\right)u_f u^c s^d = s^e \ . \tag{119}$$

A (114) mozgásállandó a spinvektor hosszából is számolható [17]:

$$s_a s^a = \frac{1}{2}S_{cd}S^{cd} \ . \tag{120}$$

Figyelembe véve, hogy $s_a S^{ab} = 0$, a (113) egyenlet s_a-val való kontrakciója mutatja, hogy $s_a p^a = 0$.

Az s^a kovariáns deriváltja az $x^a(\tau)$ mentén:

$$\begin{aligned} \frac{Ds^a}{d\tau} &= -\frac{1}{2}\eta^{abcd}S_{cd}\frac{Du_b}{d\tau} - \frac{1}{2}\eta^{abcd}u_b\frac{DS_{cd}}{d\tau} = -\frac{1}{2}\eta^{abcd}\eta_{cdef}u^e s^f a_b - \frac{1}{2}\eta^{abcd}u_b\left(p_c u_d - p_d u_c\right) \\ &= \left(\delta^a_e\delta^b_f - \delta^a_f\delta^b_e\right)u^e s^f a_b = \left(\delta^a_e\delta^b_f - \delta^a_f\delta^b_e\right)u^e s^f a_b = u^a a_b s^b \ , \end{aligned}$$

vagyis [17]

$$\frac{Ds^a}{d\tau} = u^a a_b s^b \ . \tag{121}$$

Megmutatjuk, hogy létezik egy egyértelmű formula a gyorsulás kifejezésére. Az s^a merőleges mind p^a-ra és u^a-ra, továbbá a^a merőleges u^a-ra és p^a-ra. Az a^a felbontható az s^a spinvektorral párhuzamos és arra merőleges komponensekre, továbbá mindkét komponens merőleges kell legyen u^a-ra és p^a-ra, így

$$a^a = As^a + B\eta^{abcd}u_b p_c s_d = As^a - BS^{ab}p_b \tag{122}$$

alakú. Az A együttható ennek a kifejezésnek s_a-val történő kontrakciójából számolható. Ezt a kontrakciót a (113) deriváltjának segítségével állíthatjuk elő:

$$s_a\frac{Dp^a}{d\tau} = ms_a\frac{Du^a}{d\tau} + s_a a_b\frac{DS^{ab}}{d\tau} + s_a S^{ab}\frac{Da_b}{d\tau} = ms_a a^a \ , \tag{123}$$

ahol felhasználtuk, hogy $a_b DS^{ab}/d\tau = 0$ (ami következik (109)-ből, hiszen $u^a a_a = p^a a_a = 0$), illetve $s_a S^{ab} = 0$-át. A (108) mozgásegyenletből pedig adódik, hogy

$$A = \frac{s_b a^b}{s_d s^d} = \frac{1}{ms_d s^d}s_b\frac{Dp^b}{d\tau} = \frac{s_b F^b}{ms_d s^d} \ . \tag{124}$$

A B együttható a (122) kifejezés $\eta_{aijk}u^i p^j s^k = -S_{ak}p^k$-val történő kontrakciója adja, hiszen

$$\begin{aligned} S_{ak}p^k a^a &= -a^a\eta_{aijk}u^i p^j s^k = -B\eta^{abcd}\eta_{aijk}u_b p_c s_d u^i p^j s^k = -B\eta^{ajkl}\eta_{abcd}u_j p_k s_l u^b p^c s^d \\ &= B\left(\delta^j_b\delta^k_c\delta^l_d + \delta^j_d\delta^k_b\delta^l_c + \delta^j_c\delta^k_d\delta^l_b - \delta^j_c\delta^k_b\delta^l_d - \delta^j_b\delta^k_d\delta^l_c - \delta^j_d\delta^k_c\delta^l_b\right)u_j p_k s_l u^b p^c s^d \\ &= B\left(M^2 - m^2\right)s_d s^d \ , \end{aligned}$$

ahol a

$$-\eta_{abcd}\eta^{ajkl} = 6\delta^j_{[b}\delta^k_c\delta^l_{d]} = \delta^j_b\delta^k_c\delta^l_d + \delta^j_d\delta^k_b\delta^l_c + \delta^j_c\delta^k_d\delta^l_b - \delta^j_c\delta^k_b\delta^l_d - \delta^j_b\delta^k_d\delta^l_c - \delta^j_d\delta^k_c\delta^l_b \tag{125}$$

azonosságot használtuk és a

$$p_a p^a = -M^2 \tag{126}$$

definíciót. Másfelöl az $S_{ak} p^k a^a$ kifejezés számolható (113)-ból is

$$p^k S_{ak} a^a = -p^k S_{kb} a^b = -p^k \left(p_k - m u_k\right) = M^2 - m^2 \ . \tag{127}$$

Ezért

$$B = \frac{1}{s_d s^d} \ . \tag{128}$$

Végül pedig kapjuk, hogy [18]

$$a^a = \frac{1}{s^d s_d} \left(\frac{s^b F_b}{m} s^a - p_b S^{ab} \right) \ . \tag{129}$$

Ez az egyenlet együtt a (113) kifejezéssel egy sebesség-momentum relációhoz vezet, hiszen

$$p^a = m u^a + \frac{S^{ab}}{s^d s_d} \left(\frac{s^c F_c}{m} s_b - p^c S_{bc} \right) = m u^a - \frac{S^{ab} S_{bc} p^c}{s^d s_d} \ , \tag{130}$$

ami átrendezve [19]

$$m u^a = p^a + 2 \frac{S^{ab} S_{bc} p^c}{S^{ef} S_{ef}} \ . \tag{131}$$

Az $\left\{x^a, p^a, S^{ab}\right\}|_{\tau_{in}}$ kezdeti értékek halmazával az MPD egyenleteknek egyértelmű megoldása létezik az FMP spin-mellékfeltétellel. Érdemes megemlíteni azonban, hogy (131) tetszőleges p^a és S^{ab} esetén nem feltétlenül eredményezi az $u_a S^{ab} = 0$ spin-mellékfeltétel teljesülését. Ahhoz, hogy az $u_a S^{ab} = 0$ feltételt automatikusan teljesítsük, érdemes a kezdeti feltételek halmazát $\left\{x^a, m, u^a, S^{ab}\right\}|_{\tau_{in}}$-nek választani. Azonban a kezdeti feltételeknek a $\left\{x^a, p^a, S^{ab}\right\}|_{\tau_{in}}$ halmaza nem invertálható az $\left\{x^a, m, u^a, S^{ab}\right\}|_{\tau_{in}}$ halmazra amiatt, hogy (113) tartalmazza az a^a gyorsulást. Az egyértelmű megoldáshoz az $\left\{x^a, m, u^a, S^{ab}, a^a\right\}|_{\tau_{in}}$ halmazt szükséges megadni [19]. Ha csupán az $\left\{x^a, m, u^a, S^{ab}\right\}|_{\tau_{in}}$ értékeket rögzítjük, akkor kaphatunk egy nem-helikális pályát és végtelen sok helikálisat az a^a különböző kezdeti értékeire.

IV. FORGÓ FEKETE LYUK TÉRIDŐK, A SZTATIKUS ÉS EGYÜTTMOZGÓ MEGFIGYELŐ RENDSZEREI

A. Forgó fekete lyuk téridők

Általános relativitáselméletben a vákuum fekete lyuk téridők szingularitást tartalmaznak. (Az aszimptótikusan sík és gömbszimmetrikus téridő a Schwarzschild-téridő.) Bardeen vetette fel először annak lehetőségét, hogy bizonyos anyagi mezők jelenléte esetén a fekete lyuk szingularitás mentes, vagyis reguláris lehet [20]. Azonban, hogy milyen anyagi mezők esetén valósul meg a regularitás sokáig tisztázatlan maradt. Kiderült, hogy bizonyos nem-lineáris elektrodinamika esetén a Lagrange-sűrűség elvezet az Einstein-egyenletek jobboldalán megjelenő, a Bardeen metrikához szükséges energia-impulzus tenzorhoz [21]. E nem-lineáris elektrodinamikában mágneses monopólusok jelennek meg, és a Bardeen-téridőt a mágneses monopólus körüli téridőként sikerült interpretálni. Később mások, például Hayward is felvetett reguláris fekete lyukat tartalmazó téridőt [22], aminek hasonló interpretációt lehetett adni [23]. A Bardeen, illetve a Hayward téridők nem-forgó fekete lyukakat tartalmaztak. Ezt a képet a fekete lyuk forgásának figyelembe vételével nemrégiben sikerült általánosítani [24].

A tekintetbe vett téridő család ívelemnégyzete a t, r, θ, ϕ Boyer–Lindquist-koordinátákban [24, 25]:

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\Sigma} dt^2 - \frac{2a\mathcal{B}\sin^2\theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{\mathcal{A}}{\Sigma} \sin^2\theta d\phi^2 \ , \tag{132}$$

ahol

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta \ , \ \Delta = r^2 + a^2 - 2\left[\mu + \alpha\left(r\right)\right] r \ , \ \mathcal{B} = r^2 + a^2 - \Delta \ , \ \mathcal{A} = \left(r^2 + a^2\right)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta \ . \tag{133}$$

A μ és a jelölik a tömeg, illetve a forgási paramétereket. Az ívelemnégyzet az $\alpha(r) = 0$-ra a Kerr-téridőt adja [25], amely esemény horizont jelenlétében a forgó, aszimptótikusan sík, vákuum fekete lyuk téridejét írja le. Nem vákuum esetben, nem-lineáris elektrodinamikai mező jelenlétében:

$$\alpha(r) = \frac{\mu_{em} r^{\gamma}}{\left(r^{\nu} + q_m^{\nu}\right)^{\gamma/\nu}} \ , \tag{134}$$

ahol

$$\mu_{em} = \frac{q_m^3}{\sigma}$$

az elektromágnesesen indukált ADM tömeg. A σ paraméter a nem-lineáris elektrodinamikai mező erősségét szabályozza, amelynek dimenziója hosszúságnégyzet, q_m arányos a mágneses töltéssel (lásd [23]) és a hatványok: $\gamma = 3$, $\nu = 2$ Bardeen-szerű és $\gamma = 3$, $\nu = 3$ Hayward-szerű téridőkre.

A stacionárius határfelületeket[4]

$$g_{tt} = 0 \ \Leftrightarrow \ \Delta - a^2 \sin^2\theta = 0 \tag{135}$$

egyenletek jelölik ki. Az esemény horizontokat[5] pedig a

$$g^{rr} = 0 \ \Leftrightarrow \ \Delta = 0 \tag{136}$$

feltétel adja.

Kerr-téridőre (amikor $\mu_{em} = 0$) az $a/\mu < 1$ teljesülése esetén két esemény horizont és két stacionárius határfelület van, amelyek helyzeteit

$$\frac{r_{S\pm}}{\mu} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{a^2}{\mu^2}\cos^2\theta} \ , \tag{137}$$

illetve

$$\frac{r_{H\pm}}{\mu} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{a^2}{\mu^2}} \tag{138}$$

adják. Az r_{S+} és r_{H+} közötti régiót ergoszférának nevezik. A Kerr-téridő struktúráját a 3. ábra mutatja.

A (113) ívelemnégyzettel jellemzett téridő szingularitás mentes, ha $\mu = 0$ és $\gamma \geq 3$. A 4. ábrán az a és $q = q_m/\mu_{em}$ paraméter térben a sötétített régiók mutatják Bardeen és Hayward esetekben, hogy a téridő mikor ír le forgó, reguláris fekete lyukat. A világos régiókban nincs esemény horizont.

B. Sztatikus megfigyelő rendszere

A sztatikus megfigyelők négyessebessége:

$$u_{(SO)} = \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}}\partial_t \ . \tag{139}$$

A sztatikus megfigyelők családja az ergoszférán kívül létezik, ahol $g_{tt} < 0$. Tekintsük a következő vektornégyest:

$$e_{\mathbf{0}} = u_{(SO)} \ , \ e_{\mathbf{1}} = \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}\partial_r \ , \ e_{\mathbf{2}} = \frac{\partial_\theta}{\sqrt{\Sigma}} \ , \ e_{\mathbf{3}} = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{a\mathcal{B}\sin\theta}{\Sigma\sqrt{-g_{tt}}}\partial_t - \frac{\sqrt{-g_{tt}}}{\sin\theta}\partial_\phi\right) \ . \tag{140}$$

---

[4] Stacionárius határfelületek mentén a feketelyuk forgásával ellentétes irányban r =konst., θ =konst. mentén küldött fény pályájára $d\phi/dt = 0$ teljesül.

[5] A vizsgált téridő családban az eseményhorizontok olyan fényszerű hiperfelületek, amelyeket az $f(r) = 0$ egyenlet definiál. Ez a felület, akkor fényszerű, ha a normálisa $n_a = \partial_a f$ teljesíti a $g^{ab} n_a n_b = g^{rr} n_r n_r = g^{rr} \left(\partial_r f\right)^2 = 0$ feltételt, ami a (136)-hoz vezet.

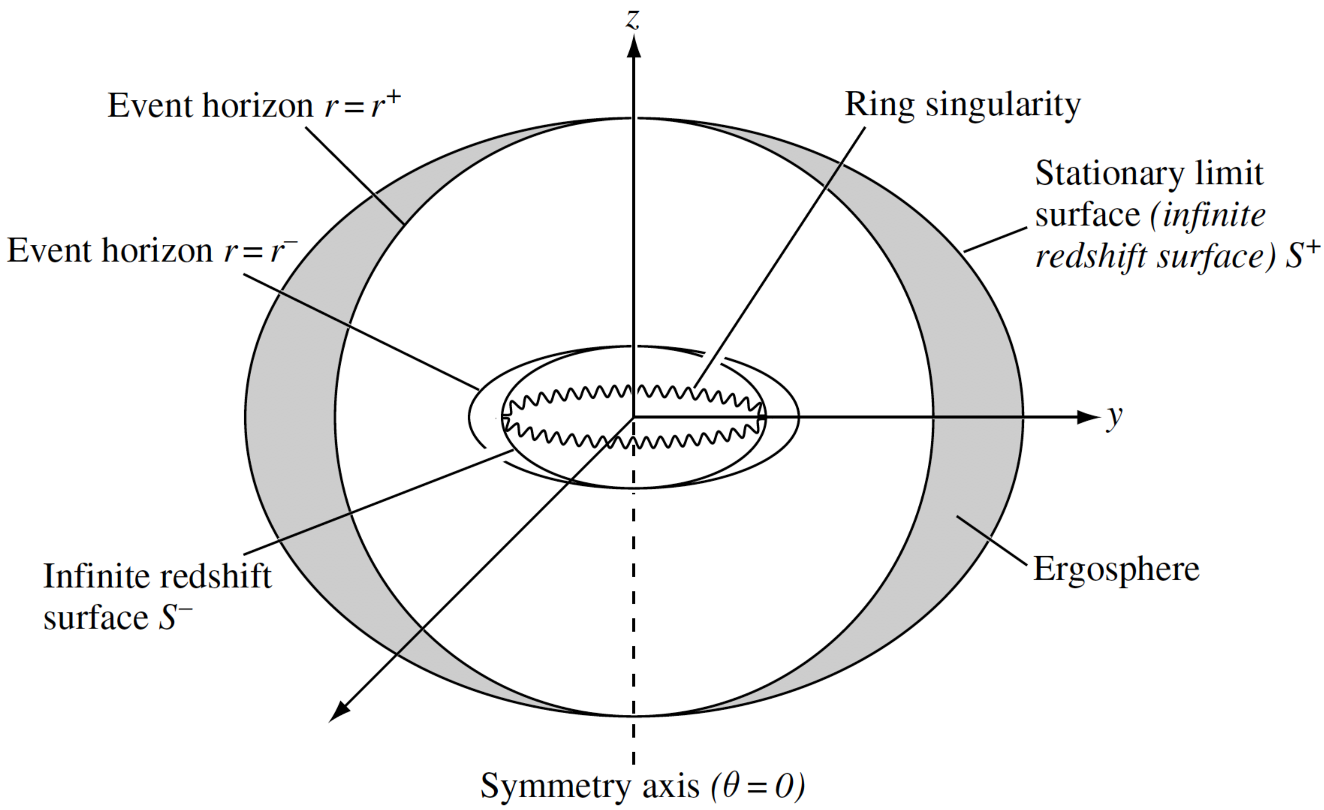

FIG. 3: A Kerr-téridő struktúrája: a legbelső hullámos vonal a gyűrű szingularitás ("ring singularity") helyzetét mutatja, majd kifelé haladva a belső stacionáris határfelületet ("inner stationary limit surface", ezt belső végtelen vöröseltolódási felületnek is nevezik "inner infinite redshift surface" S^{-}) látjuk, utána a belső esemény horizontot ("inner event horizon" $r = r^{-}$), majd a külső esemény horizontot ("outer event horizon" $r = r^{+}$), végül a külső stacionárius határfelületet ("outer stationary limit surface", vagy külső végtelen vöröseltolódási felület "outer infinite redshift surface" S^{+}). A külső stacionárius határfelület és a külső esemény horizont közötti sötétített régió az ergoszféra ("ergosphere"). [26]

Ezek egymásra páronként merőlegesek és hosszaik egységre (± 1-re) normáltak:

$$g_{ab} e^a_{\mathbf{A}} e^b_{\mathbf{B}} = \eta_{\mathbf{AB}} \ , \tag{141}$$

ahol $\eta_{\mathbf{AB}} = diag\,(-1,1,1,1)$ a Minkowski-téridő metrikus tenzora, és $\mathbf{A}, \mathbf{B} = \{0,..,3\}$. Továbbá egyszerű számolással adódik, hogy

$$g^{ab} = \eta^{\mathbf{AB}} e^a_{\mathbf{A}} e^b_{\mathbf{B}} \ , \tag{142}$$

ahol $\eta^{\mathbf{AB}}$ az $\eta_{\mathbf{AB}}$ inverze. Az ilyen tulajdonságokkal rendelkező vektornégyest tetrádnak nevezzük. A vastag betűkkel szedett indexeket tetrád indexeknek hívjuk. Jelen esetben a fenti tetrád szolgáltatja a sztatikus megfigyelő rendszerét. E rendszerben tetszőleges V vektor felírható a tetrádbeli vektorok lineáris kombinációjaként

$$V = V^a \partial_a = V^{\mathbf{A}} e_{\mathbf{A}} \tag{143}$$

alakban. A koordináta és a tetrád bázira vett komponensek közötti reláció:

$$V^a = V^{\mathbf{A}} e^a_{\mathbf{A}} \ . \tag{144}$$

A (140) négy vektorának $e^{\mathbf{A}}$ duális vektorait az alábbi egyenlet definiálja:

$$e^{\mathbf{A}}_a e^a_{\mathbf{B}} = \delta^{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}} \ , \tag{145}$$

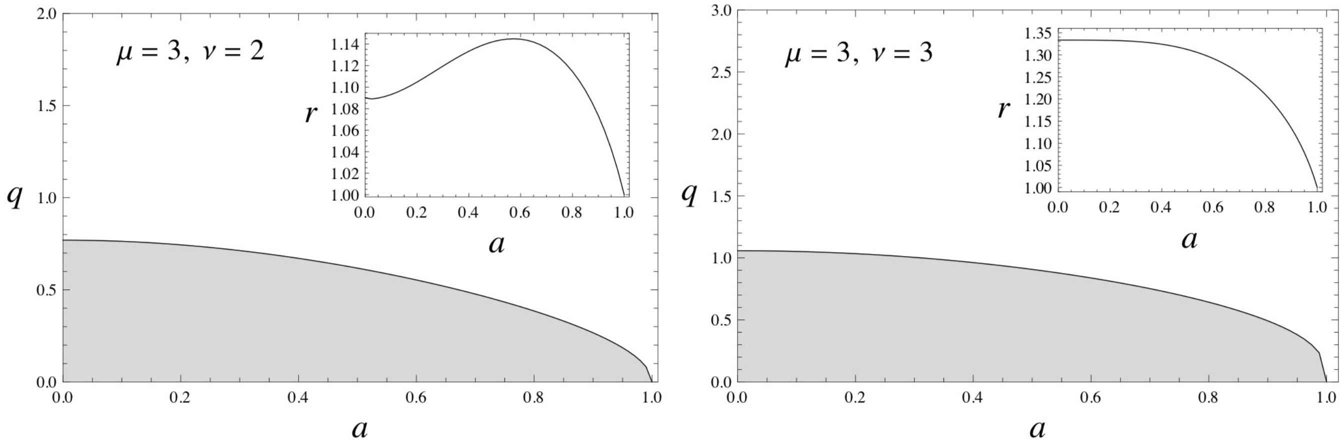

FIG. 4: A baloldalon a Bardeen-szerű, a jobboldalon a Hayward-szerű téridők láthatók. Itt a μ tömegparaméter, így a téridők regulárisak mindkét esetben. Az a és $q = q_m/\mu_{em}$ paraméter térben a sötétített régiók mutatják, hogy a téridők mikor írnak le forgó, reguláris fekete lyukat. A világos régiókban nem jelenik meg esemény horizont. (Az ábrán látható jelölésben a μ nem a tömegparamétert, hanem a $\gamma(=\mu)$ kitevőt jelenti.) [24]

amit az

$$e_a^{\mathbf{A}} = \eta^{\mathbf{AB}} g_{ab} e_{\mathbf{B}}^b \tag{146}$$

vektorok (141) miatt teljesítenek. Így kapjuk, hogy

$$e^{\mathbf{0}} = \sqrt{-g_{tt}}dt + \frac{a\mathcal{B}\sin^2\theta}{\Sigma\sqrt{-g_{tt}}}d\phi\ ,\ e^{\mathbf{1}} = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}}dr\ ,\ e^{\mathbf{2}} = \sqrt{\Sigma}d\theta\ ,\ e^{\mathbf{3}} = \frac{\sqrt{\Delta}\sin\theta}{\sqrt{-g_{tt}}}d\phi\ . \tag{147}$$

Egyenes számolással belátható, hogy

$$g_{ab} = \eta_{\mathbf{AB}} e_a^{\mathbf{A}} e_b^{\mathbf{B}}\ . \tag{148}$$

A (141) kifejezés inverz relációja pedig:

$$e_{\mathbf{A}}^a = \eta_{\mathbf{AB}} g^{ab} e_b^{\mathbf{B}}\ . \tag{149}$$

C. Tetszőleges világvonalon mozgó megfigyelő rendszere

Ha egy téridőn már ismerünk egy tetrád mezőt, vagyis valamilyen megfigyelő család rendszerét már meghatároztuk, akkor egy másik, az előző rendszerhez képest mozgó megfigyelő rendszere Lorentz-transzformációval kapható meg, alkalmazva a megfelelő "boost"-transzformációt. Legyen a másik megfigyelő négyessebessége u, ekkor az alkalmas Lorentz-traszformáció a következő tetrádot eredményezi:

$$E_{\mathbf{0}}(e,u) \equiv u = \Gamma_{(S)}(e_{\mathbf{0}} + \mathbf{v})\ ,$$

$$E_\alpha(e,u) = e_\alpha + \frac{u\cdot e_\alpha}{1+\Gamma_{(S)}}\left(u + u_{(SO)}\right)\ . \tag{150}$$

Itt $\alpha = \{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}\}$, $\mathbf{v}$ a sztatikus megfigyelő rendszerében a hozzá képest mozgó megfigyelő térbeli (3-as) sebessége ($\mathbf{v}\cdot e_{\mathbf{0}} = 0$):

$$\mathbf{v} = \Gamma_{(S)}^{-1}u - u_{(SO)}\ , \tag{151}$$

a Lorentz-faktor pedig:

$$\Gamma_{(S)} = -u\cdot u_{(SO)}\ . \tag{152}$$

A vektorok közötti pont a belső szorzatot jelöli: $W \cdot V \equiv g(W,V) = g_{ab}W^aV^b$ tetszőleges W-re és V-re. Az inverz transzformáció:

$$e_{\mathbf{0}} = \Gamma_{(S)}\left(E_{\mathbf{0}}(e,u) + \mathbf{w}\right) \ ,$$

$$e_\alpha = E_\alpha(e,u) + \frac{u_{(SO)} \cdot E_\alpha(e,u)}{1+\Gamma_{(S)}}\left(u + u_{(SO)}\right) \ , \tag{153}$$

ahol

$$\mathbf{w} = w^\alpha E_\alpha(e,u) = \Gamma_{(S)}^{-1} u_{(SO)} - u \ , \tag{154}$$

az u négyesebességgel mozgó megfigyelő rendszerében a sztatikus megfigyelő térbeli (3-as) sebessége ($\mathbf{w} \cdot E_{\mathbf{0}}(e,u) = 0$).

V. KITERJEDT PRÓBA TEST SAJÁTPERDÜLETÉNEK FEJLŐDÉSEGYENLETE AZ EGYÜTTMOZGÓ RENDSZERBEN

Az együttmozgó rendszer a kiterjedt test reprezentatív világvonalán haladó megfigyelőt jelenti. Láttuk, hogy az FMP spin-mellékfeltétellel az s^a spinvektor merőleges e világvonalra. Ebben a fejezetben meghatározzuk a spinvektor tetrád komponenseire vonatkozó mozgásegyenletet. Jelölés rövidítésként elhagyjuk az (e,u) argumentumot az $E_{\mathbf{A}}$ tetrád kifejezésében. Így a spinvektor:

$$s = s^\alpha E_\alpha \ , \tag{155}$$

ahol $\alpha = \{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}\}$, hiszen $s^{\mathbf{0}} = 0$. Az $E_{\mathbf{1}}$, $E_{\mathbf{2}}$, $E_{\mathbf{3}}$ vektorhármasra triádként, amíg s^α-kra triád komponensekként hivatkozunk.

A spinvektor u integrálgörbéje menti kovariáns deriváltja:

$$\frac{Ds}{d\tau} = \frac{ds^\alpha}{d\tau}E_\alpha + s^\alpha \frac{DE_\alpha}{d\tau} \ . \tag{156}$$

Mivel a tetrád vektorok egymásra páronként merőlegesek

$$E_{\mathbf{A}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{B}}}{d\tau} = -E_{\mathbf{B}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{A}}}{d\tau} \ , \tag{157}$$

ha $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$, a normáltságból pedig adódik, hogy

$$E_{\mathbf{A}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{A}}}{d\tau} = 0 \ . \tag{158}$$

Az $E_{\mathbf{1}}$ vektor deriváltja a következőképpen írható:

$$\frac{DE_{\mathbf{1}}}{d\tau} = -\left(E_{\mathbf{0}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{1}}}{d\tau}\right)E_{\mathbf{0}} + \left(E_{\mathbf{2}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{1}}}{d\tau}\right)E_{\mathbf{2}} + \left(E_{\mathbf{3}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{1}}}{d\tau}\right)E_{\mathbf{3}} \ . \tag{159}$$

Az első tag az $E_{\mathbf{0}} \cdot E_{\mathbf{0}} = -1$ normálás miatt kap negatív előjelet, amíg a többi tag pozitívat az $E_\alpha \cdot E_\alpha = 1$ miatt. Bevezetve az

$$\Omega^{\mathbf{3}} = E_{\mathbf{2}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{1}}}{d\tau} = -E_{\mathbf{1}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{2}}}{d\tau} \ , \tag{160}$$

$$\Omega^{\mathbf{2}} = -E_{\mathbf{3}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{1}}}{d\tau} = E_{\mathbf{1}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{3}}}{d\tau} \tag{161}$$

jelöléseket kapjuk, hogy

$$\frac{DE_{\mathbf{1}}}{d\tau} = -\left(E_{\mathbf{0}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{1}}}{d\tau}\right)E_{\mathbf{0}} + \Omega^{\mathbf{3}}E_{\mathbf{2}} - \Omega^{\mathbf{2}}E_{\mathbf{3}} \ . \tag{162}$$

Hasonlóan az $E_{\mathbf{2}}$ deriváltja felbontható, mint

$$\frac{DE_{\mathbf{2}}}{d\tau} = -\left(E_{\mathbf{0}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{2}}}{d\tau}\right) E_{\mathbf{0}} + \left(E_{\mathbf{1}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{2}}}{d\tau}\right) E_{\mathbf{1}} + \left(E_{\mathbf{3}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{2}}}{d\tau}\right) E_{\mathbf{3}} \ . \tag{163}$$

Bevezetve az

$$\Omega^{\mathbf{1}} = E_{\mathbf{3}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{2}}}{d\tau} = -E_{\mathbf{2}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{3}}}{d\tau} \tag{164}$$

jelölést kapjuk, hogy

$$\frac{DE_{\mathbf{2}}}{d\tau} = -\left(E_{\mathbf{0}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{2}}}{d\tau}\right) E_{\mathbf{0}} - \Omega^{\mathbf{3}} E_{\mathbf{1}} + \Omega^{\mathbf{1}} E_{\mathbf{3}} \ . \tag{165}$$

Az $E_{\mathbf{3}}$ vektor deriváltja pedig:

$$\frac{DE_{\mathbf{3}}}{d\tau} = -\left(E_{\mathbf{0}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{3}}}{d\tau}\right) E_{\mathbf{0}} + \left(E_{\mathbf{1}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{3}}}{d\tau}\right) E_{\mathbf{1}} + \left(E_{\mathbf{2}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{3}}}{d\tau}\right) E_{\mathbf{2}} \ , \tag{166}$$

avagy

$$\frac{DE_{\mathbf{3}}}{d\tau} = -\left(E_{\mathbf{0}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{3}}}{d\tau}\right) E_{\mathbf{0}} + \Omega^{\mathbf{2}} E_{\mathbf{1}} - \Omega^{\mathbf{1}} E_{\mathbf{2}} \ . \tag{167}$$

Összefoglalva, az E_α u-integrálgörbe menti kovariáns deriváltja kifejezhető, mint:

$$\frac{DE_\alpha}{d\tau} = -\left(E_{\mathbf{0}} \cdot \frac{DE_\alpha}{d\tau}\right) E_{\mathbf{0}} + \mathbf{\Omega} \times E_\alpha \ , \tag{168}$$

ahol $\mathbf{\Omega}$ a szögsebességvektor

$$\mathbf{\Omega} = \Omega^\alpha E_\alpha \tag{169}$$

az alábbi triád komponensekkel:

$$\Omega^{\mathbf{1}} = E_{\mathbf{3}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{2}}}{d\tau} = -E_{\mathbf{2}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{3}}}{d\tau} \ , \tag{170}$$

$$\Omega^{\mathbf{2}} = -E_{\mathbf{3}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{1}}}{d\tau} = E_{\mathbf{1}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{3}}}{d\tau} \ , \tag{171}$$

$$\Omega^{\mathbf{3}} = E_{\mathbf{2}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{1}}}{d\tau} = -E_{\mathbf{1}} \cdot \frac{DE_{\mathbf{2}}}{d\tau} \ . \tag{172}$$

A keresztszorzat (168)-ban a 3-dimenziós Euklideszi térben való vektoriális szorzatot jelenti:

$$\mathbf{\Omega} \times E_\alpha = -\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \Omega^\beta E_\gamma \ . \tag{173}$$

Itt $\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ a 3-dimenziós Euklideszi térbeli Levi-Civita szimbólum, amelynek triád indexei a 3-dimenziós Kronecker-δ-val vannak le-, illetve felhúzva. A Levi-Civita szimbólummal (170)-(172) egyenletek az alábbi összefoglaló alakba írhatók:

$$\Omega^\alpha = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} E_\beta \cdot \frac{DE_\gamma}{d\tau} \ . \tag{174}$$

A (157) összefüggés miatt az első tag (168)-ban:

$$E_{\mathbf{0}} \cdot \frac{DE_\alpha}{d\tau} = -E_\alpha \cdot \mathbf{a} \ , \tag{175}$$

ahol $\mathbf{a}$ jelöli a gyorsulás vektort: $\mathbf{a} = DE_{\mathbf{0}}/d\tau$. Így a (156) egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\frac{Ds}{d\tau} = \left(\frac{ds^\alpha}{d\tau} + \varepsilon^\alpha{}_{\beta\gamma} \Omega^\beta s^\gamma\right) E_\alpha + (s \cdot \mathbf{a})\, E_{\mathbf{0}} \ . \tag{176}$$

Végül felhasználva a (121) spin egyenletet a következőre jutunk:

$$\frac{ds^\alpha}{d\tau} + \varepsilon^\alpha{}_{\beta\gamma}\Omega^\beta s^\gamma = 0 \ . \tag{177}$$

Ennek megfelelő spin egyenletet abban az esetben, amikor a gyorsulás eltűnik, vagyis amikor a próbatest geodetikuson mozog és a spinvektor a geodetikus mentén párhuzamosan eltolt, a [27] referenciában származtattak. Saját perdülettel rendelkező test esetében ez a közelítés csak kis spin nagyság esetén, illetve közel sík téridőben érvényes. Itt, illetve [28]-ban a [27] referencia egyenletét általánosítottuk arra az esetre, amikor az MPD egyenletben a téridő görbületi és spin járulékai nem hanyagolhatók el. Fekete lyuk közelében már viszonylag kis spin esetén is fontosak ezek a járiulékok [28]. A jegyzetben az FMP spin-mellékfeltételt használtuk. Az irodalomban azonban más spin-mellékfeltételek is gyakran használatosak, különösképpen a *Tulczyjew-Dixon* [2, 3]. A [28] referenciában a fenti tárgyalást a Tulczyjew-Dixon spin-mellékfeltételre is elvégeztük. Abban az esetben a (168) egyenletben további korrekció jelenik meg.

A. A spinvektor derékszögű triád komponenseinek fejlődésegyenlete

Az előzőekben gömbi polár triád-vektorokat használtunk, hiszen E_α-kat a sztatikus megfigyelők (140)-beli gömbi polár tetrád vektoraiból állítottuk elő a (150) boost-transtformáció segítségével. Ezért a tér különböző pontjaiban E_α-k különböznek egymástól, ahogy a gömbi polárkoordinátarendszer érintő vektorai is. Ezért a test mozgása során az E_α triád bázis változik, amit figyelembe kell venni a spin vektor valódi megváltozásának meghatározásában. Egy módszert erre [27]-ben javasoltak, ahol a sztatikus megfigyelő nyugalmi rendszerében az $(e_\mathbf{1}, e_\mathbf{2}, e_\mathbf{3})$ gömbi polár triád helyett egy $(e_\mathbf{x}, e_\mathbf{y}, e_\mathbf{z})$ Descartes-szerű triádot vezettek be a következő relációval:

$$(e_\mathbf{1}, e_\mathbf{2}, e_\mathbf{3}) = (e_\mathbf{x}, e_\mathbf{y}, e_\mathbf{z})\, R \ , \tag{178}$$

ahol az R forgás mátrix:

$$R\,(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} . \tag{179}$$

Ez ugyanaz a forgás mátrix mint, ami összekapcsolja a 3-dimenziós Euklideszi térbeli Descartes és gömbi polár koordinátarendszerek érintővektorait. A boost-transzformáció és a térbeli forgatás egymással felcserélhető. Ezért az $(e_\mathbf{1}, e_\mathbf{2}, e_\mathbf{3})$, illetve az $(e_\mathbf{x}, e_\mathbf{y}, e_\mathbf{z})$ triádokat az együttmozgó rendszerbe boostolva a következőhöz jutunk:

$$(E_\mathbf{1}, E_\mathbf{2}, E_\mathbf{3})\,(e,u) = (E_\mathbf{x}, E_\mathbf{y}, E_\mathbf{z})\,(e,u)\, R \ . \tag{180}$$

Itt $(E_\mathbf{x}, E_\mathbf{y}, E_\mathbf{z})$ az $(e_\mathbf{x}, e_\mathbf{y}, e_\mathbf{z})$ triád boostoltja.

A spinvektor kifejthető a Descartes-szerű triád bázisban is

$$s = s^\mathbf{i} E_\mathbf{i} \ , \tag{181}$$

ahol $\mathbf{i} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$. A spinvektor Descartes-szerű triád komponenseire vonatkozó fejlődésegyenlet [27, 28]:

$$\frac{ds^\mathbf{i}}{d\tau} = -R^\mathbf{i}{}_\alpha \varepsilon^\alpha{}_{\beta\gamma}\Omega^\beta_{(prec)} s^\gamma \ . \tag{182}$$

Itt $\Omega^\beta_{(prec)}$ a precessziós szögsebesség[6]:

$$\Omega^\beta_{(prec)} = -\Omega^\beta_{(orb)} + \Omega^\beta \ , \tag{183}$$

ahol $\Omega^\beta_{(orb)}$-ot az alábbi egyenlet definiálja

$$\left(R^{-1}\right)^\alpha{}_\mathbf{j} \frac{dR^\mathbf{j}{}_\beta}{d\tau} = \varepsilon^\alpha{}_{\gamma\beta}\Omega^\gamma_{(orb)} \ . \tag{184}$$

[6] Megjegyezzük, hogy $\Omega^\beta_{(prec)}$ definíciója előjelben különbözik [27] referenciáétól.

B. Numerikus vizsgálat

Az FMP spin-mellékfeltétel esetén végtelen sok helikális pálya adódhat a test jellemzésre. A pálya érintővektora megjelenik a spin precessziós egyenletekben az $E_{\mathbf{A}}$-kon, illetve annak deriváltjain keresztül. Ezért a helikális pályák mentén a spinvektor iránya nagyon komplikált mozgást írhat le, ami azonban a reprezentatív pálya csavarodásához kapcsolódik és nem a spintengely valódi elfordulásához. Azért, hogy a spintengely mozgását a lehető legegyszerűbben írjuk le a test reprezentáláshoz nem-helikális pályákat célszerű választani. Nincs általános mód arra, hogy hogyan lehet nem-helikális pályát választani. Ha megadtuk az $\left\{x^a, m, u^a, S^{ab}\right\}|_{\tau_{in}}$ értékeket, akkor még az a^a kezdeti gyorsulást kellene úgy rögzíteni, hogy a pálya ne helikális legyen. Egy javaslat erre [29]:

$$p^a = mu^a + S^{ab}\frac{F_b}{m} \ , \tag{185}$$

ekkor (117)-en és (129)-en keresztül már következik a^a is. A fenti feltétellel $a^a \propto F^a/m$ spinben vezető rendben, ami plauzibilis nem-helikális pályára, mert $a^a \propto \mathcal{O}\left(s^{-1}\right)$ teljesül helikálisra. A (185) feltételt nem lehet kényszerként kiróni a teljes evolúció során, mert nem konzisztens a fejlődési egyenletekkel. A kezdeti feltételekre azonban kiróható [28].

A kezdeti spin vektort a boostolt Descartes-szerű rendszerben adjuk meg:

$$s = s^{\mathbf{i}} E_{\mathbf{i}}\left(e, u\right) \ , \tag{186}$$

ahol

$$s^{\mathbf{i}} = |s|\left(\cos\phi^{(S)}\sin\theta^{(S)}, \sin\phi^{(S)}\sin\theta^{(S)}, \cos\theta^{(S)}\right) \ . \tag{187}$$

Tehát a kezdeti spint annak nagysága $|s|$, illetve $\theta^{(S)}$ és $\phi^{(S)}$ szögekkel jellemzett iránya rögzíti.

A test pályájának jellemzésére bevezetünk egy kinematikai mennyiséget a következő definícióval:

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{R}\times\mathbf{V}}{|\mathbf{R}\times\mathbf{V}|} \ , \tag{188}$$

ahol $\times$ a 3-dimenziós Euklideszi térbeli keresztszorzat, $\mathbf{R}$ a helyvektor:

$$R^{\mathbf{x}} = x \ , \ R^{\mathbf{y}} = y \ , \ R^{\mathbf{z}} = z \ , \tag{189}$$

és $\mathbf{V}$ egy térbeli sebességvektor[7]

$$V^{\mathbf{x}} = \frac{dx}{d\tau} \ , \ V^{\mathbf{y}} = \frac{dy}{d\tau} \ , \ V^{\mathbf{z}} = \frac{dz}{d\tau} \ . \tag{190}$$

A nevezőben lévő abszolut érték a számláló "Euklideszi" hosszát jelöli. Mivel a téridő aszimptotikusan sík, ezért a térbeli végtelenben $l^{\mathbf{i}}$ egybeesik a pálya-impulzusmomentum irányával.

A numerikus példában egy spines test mozgását követjük nyomon forgó Kerr fekete lyuk körül. Az 5. ábrán gömbszerű pályákat mutatunk. A felső sorban fekete vonallal a test tömegközéppontjának pályáját látjuk az

$$x = r\cos\phi\sin\theta \ , \ y = r\sin\phi\sin\theta \ , \ z = r\cos\theta \tag{191}$$

koordinátatérben. A test kezdeti és végső helyzeteit zöld, illetve vörös pöttyök jelzik. A kezdeti helyzet az egyenlítői síkban található: $\theta(0) = \pi/2$, $r(0) = 8\mu$, $\phi(0) = 0$. A központi kék felület a fekete lyuk ergoszférájának külső határát ábrázolja. Az oszlopokban balról jobbra az $|s|/\mu m$ spin nagyság 0.01, 0.1, illetve 0.9, a többi kezdeti érték azonban ugyanaz. Kis spin nagyságra a pálya gömbi ($\dot{r} = 0$) és reprodukálja a 3. ábrát [27]-ben. Magasabb spin nagyságra (második és harmadik oszlop) a pálya egyre kevésbé lesz gömbi, de $\dot{r} \ll 1$, így azok gömbszerűek. A második sorban, a megfelelő pályák alatt lilás gömbökön a pálya irányítottságát meghatározó kinematikai mennyiség fejlődését ábrázoltuk. A vektor kezdeti és végső irányait lila és fekete nyilak mutatják. E vektor fejlődéséből tisztán látszik, hogy a spin nagyság hatással van a test pályájára. A harmadik sor zöldes gömbökön a spin irányának

[7] Megjegyezzük, hogy a (190) definícióban tetszőleges időszerű paramétert használhatunk a (188)-ban megjelenő normálás miatt.

fejlődését mutatja a boostolt sztatikus megfigyelő rendszerében. A kezdeti és végső spin irányokat a zöld és kék nyilak mutatják. A negyedik és ötödik sorok ábrázolják az $\Omega^{\alpha}_{(prec)}(e,u)$ spin precessziós szögsebesség fejlődését. A negyedik sorban rövidebb, amíg az ötödik sorban hosszabb időskálán látjuk ezt. Kis spin nagyságra $|s|/\mu m = 0.01$ a szögsebesség komponensei egyszerű oszcillációt mutatnak, amíg nagyobb spinekre egy amplitudó moduláció jelenik meg. Az amplitudó moduláció az $\dot{r} \neq 0$ miatt lép fel az utolsó két oszlopban.

További analitikus és numerikus vizsgálatok [28]-ban találhatók.

VI. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Az Emberi Erőforrások Minisztériuma UNKP-18-4 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság programjának támogatásával készült.

VII. HIVATKOZÁSOK

---

[1] Obukhov Y. N. és Puetzfeld D., *Multipolar Test Body Equations of Motion in Generalized Gravity Theories*, Fundamental Theories of Physics, kötetszám **179**, szerk.: Puetzfeld D., Lämmerzahl C. és Schutz B. (2015).
[2] Tulczyjew W. M., *Motion of multipole particles in general relativity theory*, Acta Phys. Polon. **18**, 393 (1959).
[3] Dixon W. G., *A covariant multipole formalism for extended test bodies in general relativity*, Nuovo Cim. **34**, 317 (1964).
[4] Puetzfeld D. és Obukhov Y. N., *Covariant equations of motion for test bodies in gravitational theories with general non-minimal coupling*, Phys. Rev. D **87**, 044045 (2013).
[5] Synge J. L., *Relativity of the general theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1960).
[6] Bini D., *Nonlocal gravity: Conformally flat spacetimes*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **13**, 1650081 (2016).
[7] Puetzfeld D. és Obukhov Y. N., *Deviation equation in Riemann-Cartan spacetime*, Phys. Rev. D **97**, 104069 (2018).
[8] Wald R. M., *General Relativity*, University of Chicago Press (1984).
[9] Poisson E., The motion of point particles in curved spacetime, Living Rev. Rel. **7**, 6 (2004).
[10] Mathisson M., *Neue Mechanik Materieller Systeme*, Acta. Phys. Polon. **6**, 163 (1937).
[11] Papapetrou A., *Equations of Motion in General Relativity*, Proc. Phys. Soc. **64**, 57 (1951).
[12] Dixon W. G., *Dynamics of Extended Bodies in General Relativity. I. Momentum and Angular Momentum*, Proc. R. Soc. London A, **314**, 499 (1970).
[13] Dixon W. G., *Extended Bodies in General Relativity: Their Description and Motion.*, az "Isolated Gravitating Systems in General Relativity" című "International School of Physics" kiadványában, "Course LXVII", szerk.: J. Ehlers (1979).
[14] Dixon W. G., *The New Mechanics of Myron Mathisson and Its Subsequent Development*, az "Equations of Motion in Relativistic Gravity" könyvben, szerk.: Puetzfeld D., Lämmerzahl C. és Schutz B., 1-66 oldal (2015).
[15] Frenkel J., *Die Elektrodynamik des rotierenden Elektrons*, Z. Phys. **37**, 243 (1926).
[16] Pirani F. A. E., *On the Physical significance of the Riemann tensor,* Acta Phys. Polon. **15**, 389 (1956).
[17] Semerák O., *Spinning test particles in a Kerr field - I*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **308**, 863 (1999).
[18] Kyrian K. és Semerák O., *Spinning test particles in a Kerr field - II*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **382**, 1922 (2007).
[19] Costa L. F. O., Lukes-Gerakopoulos G., Semerák O., *Spinning particles in general relativity: Momentum-velocity relation for the Mathisson-Pirani spin condition*, Phys. Rev. D **97**, 084023 (2018).
[20] Bardeen J. M., Proc. GR5, Tbilisi USSR, 174 (1968).
[21] Ayón-Beato E. és García A., *The Bardeen Model as a Nonlinear Magnetic Monopole*, Phys. Lett. B **493**, 149 (2000).
[22] Hayward S. A., *Formation and evaporation of non-singular black holes*, Phys. Rev. Lett. **96**, 031103 (2006).
[23] Fan Z.-Y. és Wang X., *Construction of Regular Black Holes in General Relativity*, Phys. Rev. D **94**, 124027 (2016).
[24] Toshmatov B., Stuchlík Z. és Ahmedov B., *Generic rotating black holes in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics*, Phys. Rev. D **95**, 084037 (2017).
[25] Kerr R. P., *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*, Phys. Rev. Lett. **11**, 237 (1963).
[26] Hobson M. P., G. Efstathiou és Lasenby A. N., *General Relativity, An Introduction for Physicist*, Cambridge Univ. Press. 2006.
[27] Bini D., Geralico A. és Jantzen R. T., *Gyroscope precession along general timelike geodesics in a Kerr black hole spacetime*, Phys. Rev. D **95**, 124022 (2017).
[28] Keresztes Z. és Mikóczi B., *Evolutions of spinning bodies moving in rotating black hole spacetimes*, beküldve a Phys. Rev. D folyóiratnak (2019); [Arxiv:1907.00974], https://arxiv.org/abs/1907.00974
[29] Costa L. F., Natário J., *Center of mass, spin supplementary conditions, and the momentum of spinning particles*, Fundamental Theories of Physics **179**, 215 (2015).

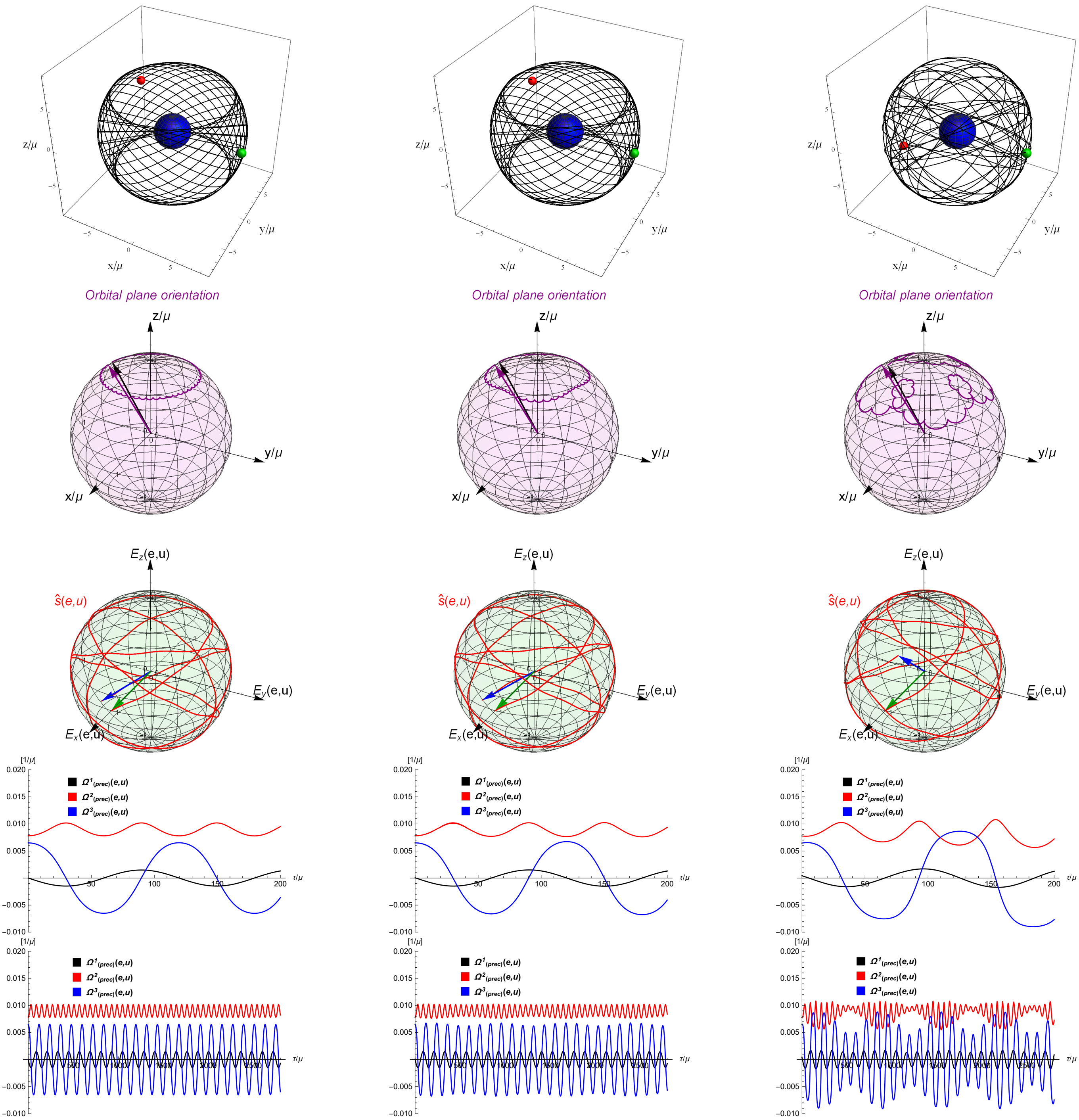

FIG. 5: Spines test fejlődése gömbszerű pályákon Kerr fekete lyuk körül, amelynek forgási paramétere $a = 0.5\mu$. Balról jobbra az oszlopokban a spin nagysága növekszik: $|s|/\mu m = 0.01$, 0.1 és 0.9. A sorok a következőt mutatják: 1. a pálya az $(x/\mu, y/\mu, z/\mu)$ koordinátatérben (kék felület az ergoszférát jelöli, amíg a test kezdeti és végső helyzeteit zöld, illetve vörös pöttyök), 2. a pillanatnyi pálya sík irányítottsága $l^{\mathbf{i}}$ (kezdeti és végső helyzeteket lila, illetve fekete nyilak jelölik), 3. egység spinvektor a boosztolt sztatikus megfigyelő rendszerében (kezdeti és végső spin irányokat zöld, illetve kék nyilak reprezentálják), 4. és 5. $\Omega^{\alpha}_{(prec)}(e,u)$ rövidebb, illetve hosszabb időskálákon. A test kezdeti helyzete: $r(0) = 8\mu$, $\theta(0) = \pi/2$ és $\phi(0) = 0$. A kezdeti spinvektor iránya: $\theta^{(S)}(0) = \pi/2$ és $\phi^{(S)}(0)$, amely a következő Boyer-Lindquist komponenseket eredményezi: $s^r(0)/|s| = 0.8682$, $\mu s^\theta(0)/|s| = 0$ és $\mu s^\phi(0)/|s| = 0$. [28]